

SÉRIE A, N° 2192
N° D'ORDRE : 3063

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ANDRÉ FOUCHÉ

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION

A L'ÉTUDE MANOGRAPHIQUE DE LA COMBUSTION DANS LES MOTEURS

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

APPLICATION DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE FOURIER
D'UNE FONCTION DISCONTINUE

Soutenues le 11 juillet 1945, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. BÉGHIN	{	Président.
		RIBAUD		Examineurs.
		VILLEY		

1945

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE MANOGRAPHIQUE
DE LA
COMBUSTION DANS LES MOTEURS

THÈSES

PRESENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ANDRÉ FOUCHÉ

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ

1^{re} THÈSE

CONTRIBUTION

A L'ÉTUDE MANOGRAPHIQUE DE LA COMBUSTION DANS LES MOTEURS

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

APPLICATION DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE FOURIER
D'UNE FONCTION DISCONTINUE

Soutenues le 11 juillet 1945, devant la Commission d'Examen

<i>Jury</i> }	MM. BÉGHIN	<i>Président.</i>
	RIBAUD	} <i>Examineurs.</i>
	VILLEY	



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. Paul MONTEL

PROFESSEURS

Charles PEREZ .	T	Zoologie.	CHAZY	T	Mécanique analytique.
P. MONTEL	T	Théorie des Fonctions.	GAULT	T	Chimie (P.C.B.).
L. BLARINGHEM	T	Botanique.	GROZE	T	Physique théorique et physique céleste.
G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	DUPONT	T	Théories chimiques.
C. MAUGUIN ...	T	Minéralogie.	LANQUINE	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
A. MICHEL-LÉVY	T	Pétrographie.	VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
A. DENJOY	T	Géométrie supérieure.	BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	F. PERRIN		Théories physiques.
E. BLOCH	T	Physique.	VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.
G. BRUHAT	T	Physique.	G. DARMOIS ...	T	Mathématiques générales.
E. DARMOIS ...	T	Enseignement de physique.	CHATTON	T	Biologie maritime.
A. DEBIERNE ..	T	Électronique et radioactivité.	AUBEL		Chimie biologique.
L. DUNOYER ..	T	Chimie physique.	Jacques BOURCART.		Géographie physique et géologie dynamique.
M. JAVILLIER ..	T	Chimie biologique.	M ^{me} JOLIO-CURIE..		Physique générale et radioactivité.
Robert LÉVY ..	T	Physiologie comparée.	PLANTEFOL ...	T	Botanique.
Henri VILLAT ..	T	Mécanique des fluides et applications.	CABANNES	T	Recherches physiques.
Ch. JACOB	T	Géologie.	GRASSE	T	Zoologie (évolution des êtres organisés).
P. PASCAL	T	Chimie générale.	PRÉVOST		Chimie organique.
M. FRÉCHET ...	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	BOULIGAND		Mathématiques.
E. ESGLANGON.	T	Astronomie.	CHAUDRON		Chimie.
M ^{me} RAMARD-LUCAS.	T	Chimie organique.	WYART		Minéralogie.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.	TEISSIER		Zoologie.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.	MANGENOT		Biologie végétale (P.C.B.).
PAUTHENIER ..	T	Électrotechnique générale.	P. AUGER		Physique.
DE BROGLIE ...	T	Théories physiques.	MONNIER		Physiologie générale.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.	PIVETEAU		Géologie.
JOB		Chimie générale.	ROCART		Physique.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparée.	H. CARTAN		Calcul différentiel.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.	SCHAEFFER	T	Physiologie générale.
COMBES	T	Physiologie végétale.	LAFFITTE		Chimie (P.C.B.).
GARNIER	T	Application de l'analyse à la géométrie.	LERAY		Mécanique théorique des fluides.
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.	FAVART		Calcul des probabilités et physique-mathématique.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.	COULOMB	T	Physique du globe.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	M ^{lle} COUSIN ...		Biologie animale (P.C.B.).
TOUSSAINT		Technique aéronautique.	CHRÉTIEN		Analyse et mesures chimiques.
M. CURIE		Physique (P.C.B.).	DRACH		Évolution des êtres organisés.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.			

Secrétaire Ch. MONIER

A la mémoire de mon père.

A ma femme.

Au Professeur JEAN VILLEY,
Hommage de respectueuse reconnaissance.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE PREMIER

	PAGES
<i>Quelques généralités relatives aux appareils de mesure à indication continue — Comment obtenir une courbe d'étalonnage quasi rectiligne</i>	1
Discussion de la courbure d'une courbe de transformation résultant de deux transformations successives de formes quelconques	2
Discussion de la courbure d'une courbe de transformation résultant de deux transformations successives dont les arcs utiles comprennent chacun un point d'inflexion	4
1° Les points d'inflexion se correspondent	4
2° Les points d'inflexion ne se correspondent pas	5
Résumé	6

CHAPITRE II

<i>Application de la méthode développée au chapitre premier, à un manographe enregistreur simple</i>	8
Description de l'appareil adopté	8
1° Capsule manométrique	9
2° Enregistreur	12
3° Pied réglable et orientable	16
Causes d'erreurs diverses	18
1° Influence de l'espace « nuisible » sous la membrane	18
2° Influence de la température de la membrane	18
3° Influence de l'encastrement de la membrane sous la couronne	19
4° Influence de la tige de rappel, du miroir mobile et des couteaux	19
5° Influence de la nature de l'objectif	19
6° Influence de la source lumineuse	20
7° Valeur de la signalisation électrique fournie par l'éclateur	20

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE III

PAGES

<i>Fréquence propre des membranes planes et relation entre la fréquence et la sensibilité</i>	23
Membranes planes encastrées	23
Relation entre la fréquence et la sensibilité	25

CHAPITRE IV

<i>Membranes non planes</i>	28
Membrane conique	28
Membrane ondulée	30
Comparaison d'une poutre courbe et d'une poutre rectiligne	31

CHAPITRE V

<i>Membranes entraînant un équipage mobile</i>	39
Vibrations parasites en période de détente	41
Amortissement	44
Autres vibrations	45

TROISIEME PARTIE

CHAPITRE VI

<i>Circulation de l'énergie dans les gaz, par conduction et par transfert sonique</i>	47
Généralités	47
Propagation de l'énergie par conduction	49
Surfaces isothermes planes	49
Surfaces isothermes cylindriques et sphériques	51
Circulation de l'énergie en cas de réaction chimique	53
1° Résultats de JOUGUET	53
2° Généralisation	55

CHAPITRE VII

<i>Interprétation de résultats expérimentaux relatifs à la combustion en milieu homogène, avec allumage provoqué</i>	57
Généralités	58

	PAGES
Application aux recherches de RASSWEILER et WITHREW et de DUCHÈNE.....	59
Relation entre la pression d'explosion, la pression de compression et l'énergie libérée à chaque instant	61

CHAPITRE VIII

<i>Interprétation de résultats expérimentaux relatifs à la combustion en milieu hétérogène avec allumage par compression</i>	64
Généralités	64
Photographies de flamme — Délai d'inflammation — Indice de cétène	65
Influence de l'avance à l'injection	69
Doping des carburants	72
<i>Conclusions</i>	75

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER

QUELQUES GÉNÉRALITÉS RELATIVES AUX APPAREILS DE MESURE A INDICATION CONTINUE COMMENT OBTENIR UNE COURBE D'ÉTALONNAGE QUASI RECTILIGNE

Dans tout appareil de mesure à indication continue, le phénomène que l'on cherche à mesurer exerce une influence directe sur l'un des éléments, lequel exerce à son tour une influence directe sur un autre élément, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le phénomène initial soit transformé en phénomène perceptible ou enregistrable.

Si le phénomène final est proportionnel au phénomène initial, l'appareil est réellement capable de « mesurer », au sens propre du mot, sinon il ne peut que « repérer » et, dans ce cas, il est nécessaire de faire subir aux diagrammes des transformations géométriques qui peuvent être très complexes et qui en diminuent beaucoup la valeur.

La sensibilité d'un appareil de mesure est le quotient d'une variation du phénomène final à la variation correspondante du phénomène à mesurer. Si elle est constante, la courbe représentant graphiquement les variations du phénomène final, en fonction du phénomène initial, est une droite. Cette courbe, que l'on peut établir expérimentalement en étalonnant l'appareil, est aussi appelée courbe d'étalonnage.

Le moyen le plus simple, pour obtenir une courbe d'étalonnage rectiligne, est de prendre de très petites variations du phénomène secondaire, c'est-à-dire de celui qui est provoqué directement par le phénomène à mesurer et de l'amplifier très fortement à l'aide d'amplificateurs homogènes. Pratiquement, cette solution est défendable, car le petit arc de courbe représentant les variations secondaire-initial voit son rayon de courbure augmenter dans la proportion de l'amplification et la courbe d'étalonnage résultante se présente comme

une courbe à grand rayon. Il est, en particulier, intéressant de choisir un petit arc de la courbe secondaire-initial voisin d'un point d'inflexion, ou même à cheval sur un point d'inflexion.

Cette méthode, théoriquement simple, exige une amplification homogène et surtout une grande raideur du phénomène secondaire, c'est-à-dire que le premier élément déformable ou mobile de l'appareil doit avoir une sensibilité très faible par rapport au phénomène à mesurer. Cette circonstance est aussi souhaitable à un autre point de vue, lorsque l'appareil doit mesurer des phénomènes variant très rapidement, car intervient alors l'inertie des pièces déformées et mobiles, mais ce point de vue sera étudié plus loin, au chapitre III, qui traite de la notion de fréquence propre en relation avec la sensibilité.

Dans ce chapitre, il sera seulement étudié le point de vue géométrique de la configuration de la courbe d'étalonnage et une méthode générale sera établie qui permettra d'obtenir une courbe d'étalonnage quasi rectiligne, par combinaisons convenables des arcs choisis sur les courbes des transformations successives du phénomène à mesurer en phénomène enregistré ou perçu.

DISCUSSION DE LA COURBURE D'UNE COURBE DE TRANSFORMATION RÉSULTANT DE DEUX TRANSFORMATIONS SUCCESSIVES DE FORMES QUELCONQUES

Désignons par x le phénomène primaire, y le secondaire, z le tertiaire et supposons la première transformation régie par la loi $y = f(x)$, la seconde par $z = g(y)$ et désignons par $z = \varphi(x)$ la transformation résultante. Soient (x_1, x_2) l'intervalle de variation du phénomène primaire, (y_1, y_2) , (z_1, z_2) les intervalles de variation des phénomènes suivants. On a la relation :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx},$$

et l'on pourrait chercher à établir la courbure de $z = \varphi(x)$ par le calcul, mais il paraîtra plus clair d'utiliser quelques remarques graphiques (*fig. 1*) :

Considérons les deux arcs de courbes $M_1 M_2$ de $y = f(x)$ et $N_1 N_2$ de $z = g(y)$, le premier tournant sa concavité vers le haut, le deuxième vers le bas, et désignons par $p(x)$ la pente $\frac{dy}{dx}$ et par $q(y)$ la pente $\frac{dz}{dy}$: la fonction $p(x)$ pente de la première courbe est croissante, la fonction $q(y)$ est décroissante et, en reportant les variations de ces deux dernières fonctions sur le même graphique, en prenant comme abscisse les x , on obtient deux arcs de courbe qu'on peut pratiquement confondre avec deux segments de droite pour la discussion qui va suivre et dans laquelle on verra, en outre, que le choix des unités, bien que faisant varier courbes et segments de droites, est indifférent.

La question qui se pose est de savoir si la pente de la transformation résultante $z = \varphi(x)$ présente un maximum ou un minimum, auquel cas la dérivée $\frac{d^2 z}{dx^2}$ s'annule et la courbe $z = \varphi(x)$ présenterait une inflexion dans l'arc utilisé.

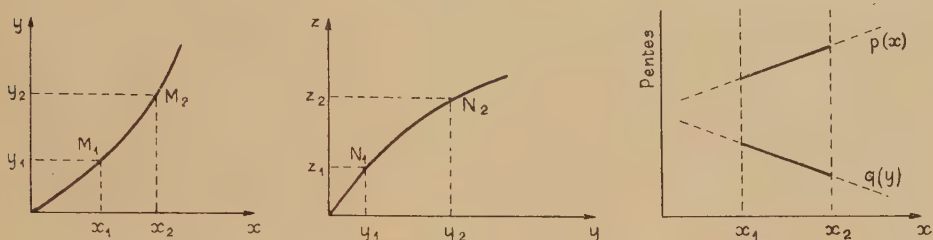


Fig. 1

On peut toujours dire que la pente $\frac{dz}{dx}$ est le produit $\frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$ ou $p(x) \times q(y)$, ce dernier facteur étant représenté sur le troisième graphique

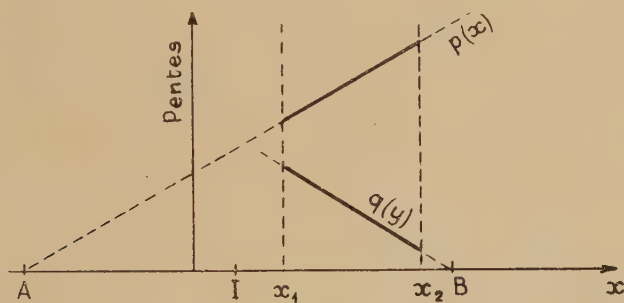


Fig. 2

en fonction implicite de x . En tenant compte de ce que nous avons supposé, que $p(x)$ et $q(y)$ sont représentés par des droites, on peut écrire :

$$\frac{dz}{dx} = (\alpha x + \beta)(\alpha' x + \beta'),$$

après avoir posé :

$$p(x) = \frac{dy}{dx} = \alpha x + \beta \quad \text{et} \quad q(y) = \frac{dz}{dy} = \alpha' x + \beta'.$$

Présenté ainsi, $\frac{dz}{dx}$ apparaît comme un trinôme du deuxième degré qui a un minimum ou un maximum pour :

$$x = -\frac{\alpha' \beta + \alpha \beta'}{2 \alpha \alpha'} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta'}{\alpha'} \right).$$

Or $-\frac{\beta}{\alpha}$ et $-\frac{\beta'}{\alpha'}$ sont les abscisses des points de rencontre A et B des droites $p(x)$ et $q(y)$, avec l'axe des x , et ainsi l'abscisse du minimum ou maximum est le milieu de ce segment.

Dans le cas de *figure* précédent (*fig. 2*) on obtient un point I extérieur, à l'intervalle $x_1 x_2$, et ce résultat est bien indépendant du choix des unités et de la représentation implicite de $q(y)$ en fonction de x , puisqu'une modification d'unité correspond à une dilatation ou contraction d'ordonnées et n'influe en rien sur les points A et B, ni sur le point I dont l'abscisse est une valeur très approchée de l'abscisse du point d'inflexion réel de $z = \varphi(x)$.

En pratique, cette construction est délicate, car il s'agit presque toujours d'arcs de courbe petits et pour lesquels la variation de pente, donc les pentes des droites $p(x)$ et $q(y)$ sont mal déterminées, sauf par le calcul, mais elle a toujours une valeur d'approximation et peut permettre de prévoir si l'arc de courbe utile est proche ou non d'un point d'inflexion; en particulier, si les pentes de $p(x)$ et de $q(y)$ sont de même sens, c'est-à-dire si les arcs de courbes $y = f(x)$ et $z = g(y)$ tournent leurs concavités dans le même sens, les points A et B, et par conséquent leur milieu I, sont tous d'un même côté de l'intervalle utile qui ne contiendra certainement pas de point d'inflexion.

Il existe toutefois un cas particulier où la discussion peut être poussée plus loin et ce cas, particulier au point de vue géométrique, peut se rencontrer facilement dans la pratique : c'est le cas où les arcs utiles des courbes $y = f(x)$ et $z = g(y)$ comprennent chacun un point d'inflexion.

DISCUSSION DE LA COURBURE D'UNE COURBE DE TRANSFORMATION RÉSULTANT DE DEUX TRANSFORMATIONS SUCCESSIVES DONT LES ARCS UTILES COMPRENNENT CHACUN UN POINT D'INFLEXION

1° Les points d'inflexion se correspondent.

Il est évident que si la courbe $y = f(x)$ a un point d'inflexion en $x_1 y_1$ et la courbe $z = g(y)$ au point $y_1 z_1$, la courbe $z = \varphi(x)$ en aura un au point $x_1 z_1$ et l'on pourra même prévoir directement si la courbure de $z = \varphi(x)$, au voisinage du point d'inflexion, est plus grande ou plus petite que les courbures des courbes $z = g(y)$ et $y = f(x)$, car on peut voir directement si les courbures de ces dernières se contrarient ou non.

Pour préciser ce dernier point, on peut distinguer les arcs de courbes, comprenant un point d'inflexion, en deux types de configuration différente : l'un sera dit courbe en S, l'autre courbe en Z, et ces dénominations les caractérisent suffisamment. Ces deux configurations ne sont pas superposables par déplacement dans un plan, il faut faire sortir l'une du plan pour pouvoir l'amener en quasi-coïncidence avec l'autre; elles sont symétriques ou inversement égales. Ces deux types de courbes se rencontrent aussi bien l'un que

l'autre : les courbes $y = \sin x$ et $y = \text{Arc tg } x$ sont du type S, au voisinage de l'origine ; par contre, au voisinage de l'origine toujours, les courbes $y = \text{tg } x$ et $y = \text{Arc sin } x$ sont du type Z.

On peut encore dire, si l'on se limite aux courbes croissantes, que les courbes en S ont une dérivée première croissante, puis décroissante, et qu'au contraire les courbes en Z ont une pente décroissante, puis croissante.

En utilisant cette définition on peut maintenant préciser que si les deux courbes $y = f(x)$ et $z = g(y)$ sont de même type, la courbe résultante $z = \varphi(x)$ sera aussi de même type et aura une courbure plus accentuée qu'aucune des deux autres ; au contraire, si les deux premières courbes sont de type opposé, la courbe résultante sera de l'un ou l'autre type mais sa courbure, au voisinage du point d'inflexion, sera au moins aussi bonne que la moins bonne des courbes composantes.

L'analyse par le graphique des pentes est immédiate (fig. 3).

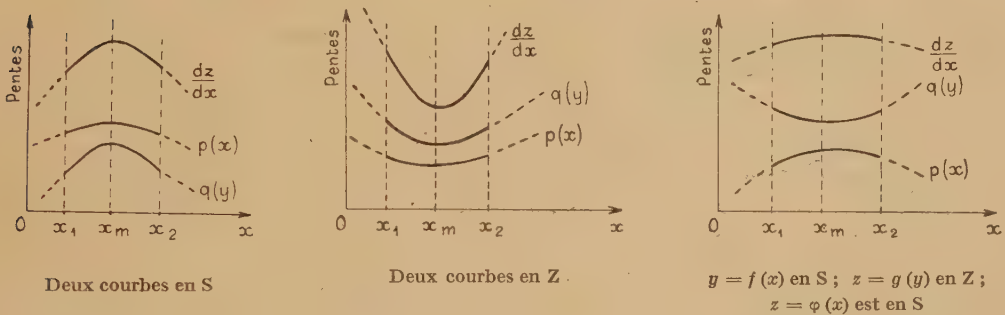


Fig. 3

Les positions relatives des arcs de pentes et leurs formes absolues dépendent évidemment du choix des unités, mais il est facile de voir que ce choix n'influe pas sur les conclusions qui précèdent et, en particulier, sur le fait que l'on peut utilement contrarier les courbures en faisant choix de courbes de types opposés lorsque correspondent les points d'inflexion.

2° Les points d'inflexion ne se correspondent pas.

C'est le cas particulier qui est de beaucoup le plus important dans la pratique et l'on va voir que le résultat n'en est pas évident *à priori*, ce qui justifiera l'ensemble de cette discussion.

On supposera donc que les points d'inflexion ne se correspondent pas et, pour faciliter l'exposé, nous imaginerons que la courbe $y = f(x)$ a un point d'inflexion en x_1 à l'une des limites de l'intervalle et la fonction $z = g(y)$ a un point d'inflexion en x_2 à l'autre limite. Deux cas sont à envisager suivant que les courbes, toujours supposées croissantes, sont de même type ou non (fig. 4).

L'analyse repose sur le fait que, lorsqu'une pente passe par un maximum ou un minimum, elle varie très lentement au voisinage et que c'est l'autre pente

qui impose son sens de variation au produit $\frac{dz}{dx} = p(x) \times q(y)$. On voit donc que lorsque les courbes sont de type contraire, il n'y a pas de point d'inflexion dans l'intervalle utile, tandis que lorsque les courbes sont de même type il y en a certainement un.

On peut bien espérer que lorsque les courbes sont de types contraires il y a quand même un point d'inflexion de chaque côté de l'intervalle utile, et préjuger favorablement de la courbure d'un arc compris ainsi entre deux points d'inflexion, mais ceux-ci peuvent être très éloignés, et si même on imagine le cas simple où les deux arcs de pentes sont deux paraboles égales, on constate que les points d'inflexion sont éloignés des limites de l'intervalle à une distance qui peut atteindre plusieurs fois la longueur de cet intervalle et même, dans certains

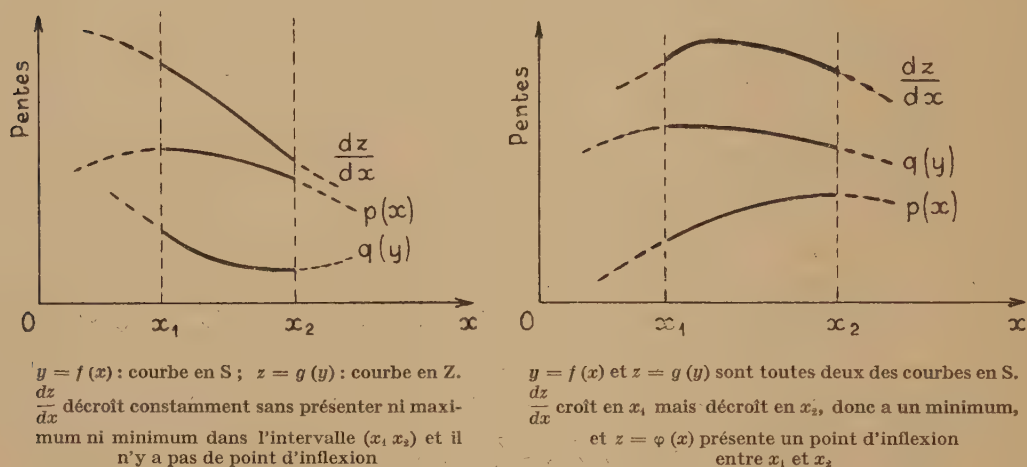


Fig. 4

cas, le point d'inflexion peut ne pas exister d'un côté. Dans tous les cas, la situation est nettement défavorable et, contrairement au cas où les points d'inflexion se correspondent et où il vaut mieux prendre des courbures contrariées, il sera nécessaire absolument de prendre ici des courbes de même type si l'on veut que l'intervalle utile contienne un point d'inflexion pour la courbe résultante.

Résumé.

Si l'on veut obtenir une courbe d'étalonnage suffisamment rectiligne, il est nécessaire que l'arc utilisé comprenne un point d'inflexion et, pour obtenir ce résultat, on peut partir de courbes intermédiaires dont les arcs utiles n'en comportent pas, mais il faut alors contrarier les courbures et choisir les arcs utiles par un graphique de pente bien construit qui donne une indication et achever par une mise au point expérimentale. On peut aussi, lorsque les courbes intermédiaires comportent des points d'inflexion, faire correspondre

ceux-ci, très exactement, si les courbes sont de forme contraire ou les décaler aux environs des limites de l'intervalle utile si les courbes sont de même forme.

Pour des combinaisons de plus de deux courbes, on peut agir de proche en proche, remplacer l'action de plusieurs courbes par leur courbe résultante et intervertir l'action des courbes dans l'étude graphique de façon quelconque.

Ces résultats ont été établis pour des courbes croissantes, mais il est toujours possible de s'y ramener.

On peut ainsi obtenir des courbes d'étalonnages remarquablement rectilignes, sans aucun calcul, si l'on peut se placer constamment dans le cas de l'existence de points d'inflexion dans tous les arcs utiles des courbes intermédiaires.

CHAPITRE II

APPLICATION DE LA MÉTHODE DÉVELOPPÉE AU CHAPITRE PREMIER A UN MANOGRAPHE ENREGISTREUR SIMPLE

Le problème traité, dans ce chapitre, consiste à réaliser un manographe économique présentant les qualités optima, la première condition étant impérative. Le manographe doit, en outre, être rustique, facilement vérifiable en tous ses éléments, démontable complètement, de façon à pouvoir changer une pièce, le cas échéant, chacune des pièces pouvant être réalisée, autant que possible, dans un petit atelier.

La solution choisie, après de nombreux essais, est un manographe à membrane plane, dont la déformation est transmise à un miroir oscillant par une tige de rappel, ce miroir oscillant réfléchissant un faisceau de lumière parallèle, issu d'une lentille à grand foyer, dans la même lentille, qui concentre le faisceau réfléchi sur la fente d'un cylindre enregistreur, d'assez forte inertie, mû par un flexible entraîné par le moteur à étudier.

Cette solution est évidemment très simple, *à priori*, mais la réalisation doit être très étudiée pour fournir des indications fidèles et une courbe d'étalonnage rectiligne. En outre, pour que le manographe puisse être utilisé pour des moteurs tournant à grande vitesse, il faut que les pièces mobiles aient une inertie très faible. Si donc il est facile de résoudre le problème au seul point de vue géométrique, il devient vite très délicat à réaliser pratiquement.

Dans le présent chapitre on analysera d'abord le dimensionnement des pièces, en vue d'obtenir une courbe d'étalonnage rectiligne, puis on passera en revue toutes les incidences diverses, sauf la question inertie qui sera traitée dans le chapitre III, où est étudiée la relation entre la sensibilité et la fréquence propre de la membrane.

DESCRIPTION DE L'APPAREIL ADOPTÉ

L'appareil comprend trois parties séparées : la capsule manométrique, l'enregistreur et le pied réglable.

1° Capsule manométrique.

DESCRIPTION. — La *figure 5* représente une coupe de la capsule manométrique, faite perpendiculairement à l'axe d'oscillation du miroir *m*. On peut y voir que l'appareil se sépare en deux parties : le culot *C*, qui peut être vissé sur un trou de bougie ou de clapet de démarrage, et la couronne *C'*, qui se fixe sur le culot au moyen de six vis à tête cylindrique. Entre la base de la couronne et le fonds du puits du culot est encastrée une membrane plane en élinvar, de 4 à 7 dixièmes de millimètres d'épaisseur, suivant la pression maximum prévue. Le culot, dans sa partie inférieure, est percé d'un trou axial en forme de tuyère, de 2 mm de diamètre minimum, diamètre qui est respecté depuis 3 mm de l'entrée jusqu'à 6 mm de la membrane, sous laquelle la tuyère s'épanouit complètement à 16 mm de diamètre.

Le fond du puits du culot est dressé très exactement, ainsi que la base de la couronne, et pour diminuer encore les risques de fuite, il a été ménagé une rigole de 1 mm de large sur toute la circonférence du fond du puits. De plus, pour que les six vis qui serrent la couronne sur le culot aient leur pleine efficacité, il y a un jeu latéral de 0,2 mm entre les flancs extérieurs de la partie inférieure de la couronne qui pénètre dans le culot et les flancs intérieurs du puits du culot. Cette dernière précaution est indispensable si l'on songe que ces pièces doivent être faites dans un petit atelier, car la précision de dressage des plans peut être grande, mais non celle de la perpendicularité des plans et des axes, et il faut craindre une légère obliquité de l'axe de la couronne par rapport à la normale à la membrane et, si cela était, il y aurait à craindre un blocage latéral de la couronne dans le puits, ce qui aurait pour effet de serrer la membrane non uniformément. Dans le même but d'éviter les fuites, il est bon de serrer les vis de la façon suivante : après avoir placé la membrane au fond du puits, on place la couronne dans un azimut repéré à l'avance (celui de la fabrication), de façon que les trous de vis se correspondent bien dans la couronne et le culot, puis on met une vis à fond, mais sans bloquer; on met ensuite la vis diamétralement opposée, puis les quatre autres; ensuite on bloque par petits coups dans le même ordre. L'importance de cette précaution est très grande car s'il y a des fuites la capsule manométrique chauffe en quelques minutes, de façon tout à fait inacceptable pour la valeur des indications de l'appareil. Sur la couronne est disposée une petite barre d'acier fixée par deux des six vis précédentes. La petite barre, représentée en bout sur la *figure 5* porte, en son centre, un trou de 2 mm de diamètre, d'un côté un couteau *c*, dont le biseau saille au-dessus et, de l'autre côté, une lame mince qui descend dans le puits et, après un coude, vient servir de guidage lâche à la base de la tige de rappel. Le trou central de la barre laisse passer librement la tige de rappel, dans ce

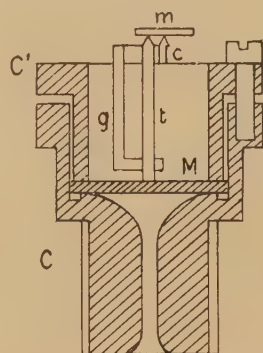


Fig. 5. — Capsule manométrique (coupe).

m : miroir plan ; *c* : couteau ;
t : tige de rappel ;
M : membrane ; *C* : culot ;
C' : couronne ; *g* : lame de guidage
 (Échelle 1)

but, n'a qu'un diamètre de 1,8 mm et le trou ne constitue aussi qu'un guidage lâche sans frottement. La tige de rappel est simplement posée sur la membrane par un plat bien dressé et se termine par un biseau dont le tranchant affleure au niveau de celui du couteau c.

Sur le couteau et sur le biseau de la tige de rappel est posée une plaquette d'acier au chrome dont la face supérieure a été polie, puis chromée, et fonctionne comme un miroir plan, et dont la face inférieure comporte deux rainures, l'une suivant l'axe longitudinal, l'autre parallèle à la première, les fonds des rainures taillés à la même profondeur et écartés de 2 mm. (Un ressort en lame, de forme convenable, vient appuyer fortement la plaquette miroir sur ses deux appuis et, par conséquent, immobilise la tige de rappel entre la membrane et le miroir; les deux guidages lâches n'ayant plus d'actions latérales sont donc bien sans frottement sensible.

On peut être surpris de cette disposition générale qui paraît présenter des parties inutiles, aussi bien dans le culot et la couronne, et surtout dans la tige de rappel qui peut paraître longue, mais dans les moteurs les trous de bougies sont dans des creux de carter et il faut penser à pouvoir mettre en place la capsule et la visser à fond. Il a même été nécessaire, dans certain cas, de prévoir une pièce tubulaire assez longue comportant un épaulement circulaire intérieur à une extrémité; dans cette pièce on glisse la capsule toute montée, deux vis latérales bloquent la capsule à l'intérieur de ce fourreau et celui-ci peut servir au vissage de l'ensemble dans le trou de bougie.

Telle qu'elle est la capsule met la face intérieure de la membrane à 22 mm de la paroi intérieure de la culasse, le volume sous la membrane est réduit au minimum, sans que sa configuration en tuyère provoque trop de tourbillonnements qui, non seulement occasionneraient une perte de charge, mais une altération de pression non mesurable et les gaz usés qui y stationnent forment, s'il n'y a pas de fuite sous la membrane, un tampon d'inertie calorifique qui protège très efficacement la membrane contre tout échauffement important.

A l'usage il a été reconnu nécessaire d'adjoindre au miroir oscillant un miroir fixe, encastré dans le bloc latéral — non figuré — qui tient le ressort de rappel. Ce miroir fixe sert de témoin en cas de déplacement du zéro, trace une ligne de base en même temps que le miroir oscillant trace le diagramme, et permet de déceler les vibrations de rotation du moteur, les vibrations de translation étant annulées par l'emploi des rayons parallèles.

ANALYSE DES COURBURES. — L'analyse de l'indication de la capsule manométrique, c'est-à-dire de la rotation du miroir oscillant en fonction de la déformation de la membrane transmise par la tige de rappel et de cette déformation en fonction de la pression, analyse faite au point de vue développé au chapitre premier, est très simple.

La courbe flèche de membrane-pression a un point d'inflexion à l'origine, par raison de symétrie, puisque la membrane est plane. C'est une courbe en S puisque les déformations, d'abord proportionnelles aux pressions,

sont ensuite moins fortes puisqu'interviennent les allongements internes. La courbe angle de rotation du miroir-flèche de membrane est une courbe en Z. En effet, le biseau de la tige de rappel étant engagé dans sa rainure, quand le miroir tourne, la distance du couteau et du biseau reste toujours 2 mm et si l'on appelle f la flèche de membrane, α l'angle de rotation en radians, l la distance 2 mm entre les fonds de rainures, on a $f = l \times \sin \alpha$, c'est-à-dire $\alpha = \text{Arc sin } \frac{f}{l}$, ce qui donne bien une courbe en Z avec point d'inflexion à l'origine pour $f = 0$ (fig. 6).

Les courbes étant de formes contraires, il est nécessaire de faire coïncider exactement les points d'inflexion, c'est-à-dire que, pour une pression nulle, la flèche de membrane étant nulle, il faut que le plan du miroir soit horizontal, ou, pour mieux dire, perpendiculaire à l'axe de la capsule manométrique. La

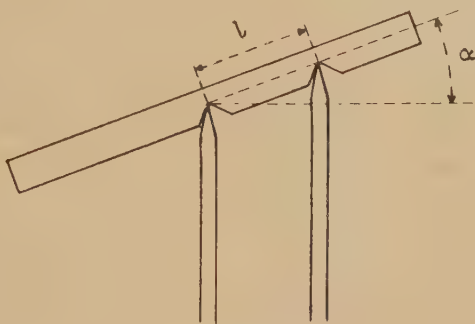


Fig. 6

courbe résultante a donc un point d'inflexion à l'origine et, suivant les dimensions adoptées pour la membrane et la longueur du bras de levier, peut être en S ou en Z.

Il est à remarquer que cette solution, malgré des déplacements latéraux du deuxième ordre de la tige de rappel, est nettement préférable à la solution plus simple, à première vue, qui consisterait à imposer un guidage plus serré à la tige de rappel, guidage que l'on pourrait obtenir par des lames très flexibles fixées en haut et en bas de la tige et solidaires des flancs intérieurs de la couronne, si l'on voulait éviter les frottements des trous de guidage. En effet, la liaison angle de rotation-flèche de membrane serait alors $f = l \cdot \text{tg } \alpha$, soit $\alpha = \text{Arc tg } \frac{f}{l}$ serait alors une courbe en S, donc de même forme que la courbe pression-flèche et il faudrait alors décaler les points d'inflexion, ce qui s'obtiendrait en raccourcissant la tige de rappel de façon que le miroir ne soit horizontal qu'en fin de course et, finalement, on obtiendrait une courbe résultante angle-pression avec un point d'inflexion vers le milieu de l'arc utile. Ce résultat n'est nécessaire qu'à la fin des transformations et il y aura encore l'enregistreur à considérer. Si donc, au point de vue des inflexions, le guidage serré et le guidage lâche sont équivalents, il est loin d'en être de même au point de vue

de l'ajusteur-mécanicien car un guidage serré, même sans frottement, par lamelle élastique, imposerait un frottement du biseau sur la face inférieure du miroir.

Cette dernière discussion montre que de très petites variations de longueur de la tige de rappel ont une grande influence et il sera nécessaire de la vérifier souvent, en particulier en vérifiant le zéro du miroir oscillant par rapport au miroir témoin, ce qui constitue une vérification très sensible.

Il reste toutefois contre le dispositif choisi, comme tous ceux à tige de rappel, le grave inconvénient de l'échauffement de la tige qui pourrait être plus élevé que celui du boîtier qui supporte le couteau fixe, mais l'expérience montre que le déplacement du zéro n'existe que pour des membranes minces, comme celle que l'on pourrait avoir à utiliser pour l'étude de faibles pressions comme, par exemple, des diagrammes de balayage, ce qui prouve que c'est uniquement la déformation de la membrane qui comporte une partie résiduelle due à un mauvais réencastrement sous la couronne et non pas à un échauffement de la tige de rappel.

On voit donc, finalement, que le dispositif adopté présente les meilleures qualités de fonctionnement, de vérification à tout instant et de réajustement, le cas échéant, si bien qu'un mécanicien averti peut tirer, de cette capsule manométrique, un rendement très satisfaisant quand il en connaît bien les particularités.

2° Enregistreur.

DESCRIPTION. — L'enregistreur (*fig. 7*) est simplement constitué par un carter en bois, prolongé d'un tube qui porte un objectif achromatique de 60 cm de distance focale et de 60 mm de diamètre. Dans le plan focal de l'objectif, en réalité à 1 cm de part et d'autre, se trouvent une source lumineuse à filament linéaire et la fente du cylindre dans lequel tourne le tambour porte-film.

On voit donc que le système optique total de cet enregistreur et du miroir plan de la capsule manométrique est un système catadioptrique dont l'ensemble objectif-miroir plan équivaut à un miroir concave de 60 cm de distance focale et qui travaille dans les meilleures conditions d'aplanétisme et de clarté, les déplacements de translation du miroir, dus aux vibrations du moteur, étant sans influence sur l'image du filament.

L'enregistreur est complété d'un éclateur simple ou double, placé à la base de la fente du cylindre et à 2 cm en avant et qui est mis en série avec une bougie ou avec une magnéto ou un dispositif de signalisation électrique quelconque. Les inscriptions sont excellentes et couvrent toute la fente, mais les indications résultantes feront l'objet, plus loin, de réserves sévères.

Le tambour porte-film doit être très soigneusement équilibré, car il tourne à la demi-vitesse du moteur, et un défaut d'équilibrage détruirait presque instantanément le réglage optique qui est assez délicat, surtout quand l'objectif est éloigné de plus de 60 cm de la capsule. Le mouvement de rotation

est imposé par un flexible relié à l'axe des demi-vitesse du moteur à étudier et par l'intermédiaire d'un embrayage à disque, à frottement très doux, placé juste en dessous du cylindre porte-film.

Le tambour porte-film, bien que très léger, a une grande inertie à cause de son diamètre et, par conséquent, tourne avec une vitesse uniforme et ainsi on obtient des diagrammes pression-temps, les angles manivelles étant seulement repérés par endroits à l'aide des étincelles de l'éclateur.

La fente du cylindre enregistreur peut être obturée par un dispositif à échappement qui survolterait en même temps la source lumineuse pendant le temps très court de l'inscription d'un diagramme unique.

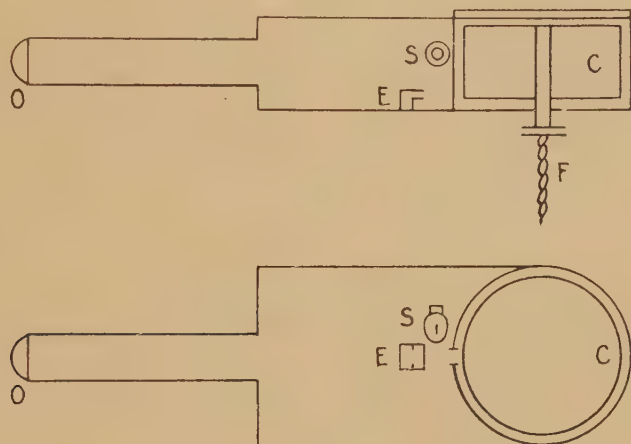


Fig. 7. — Enregistreur

O : objectif émetteur-récepteur ; S : source lumineuse ;
E : éclateur ; C : cylindre porte-film ; F : flexible

(Échelle 1/10)

Ce dispositif à échappement peut consister en trois filets d'une vis sans fin, bloquée sur l'axe du tambour ; les deux filets extrêmes étant isolés électriquement et une tige très flexible pouvant être lâchée au moment voulu sur le filet supérieur, laisserait passer le courant de survoltage quand elle passerait sur le filet médian.

Ce dispositif a été abandonné pour raison de simplification et remplacé par un interrupteur à main consistant en une tige fendue, tournant dans un cylindre fendu, placé devant la fente du tambour enregistreur et formant ainsi une sorte de robinet à « boisseau » ou à « quart de tour » qui serait aussi haut que le tambour. La tête de ce robinet porte une tige transversale qui passe sur un contact de survoltage quand le « robinet » est ouvert. Il est bien évident que l'on risque d'obtenir plusieurs diagrammes à la fois mais on arrive très vite à étalonner le mouvement de la main pour n'obtenir qu'un diagramme ou deux. Il est bon, alors, de débrayer l'entraînement du tambour une dizaine de secondes avant l'enregistrement, de façon que la vitesse de rotation tombe un peu et que les diagrammes obtenus soient décalés l'un par rapport à l'autre.

Le diamètre du tambour porte-film est de 114 mm de sorte que, compte tenu de l'épaisseur du film, la longueur d'un film est 360 mm, soit 1 mm par degré manivelle du moteur, en négligeant l'irrégularité cyclique, si le flexible est fixé à l'arbre principal du moteur ou 1 mm par 2 degrés manivelle-moteur si le flexible est fixé à l'arbre demi-vitesse.

ANALYSE DES COURBURES. — L'analyse des courbes de transformation se limite à la courbe : déplacement de l'image du filament en fonction de l'angle de rotation du miroir de la capsule, et cette courbe dépend beaucoup de la position de l'axe optique de l'enregistreur par rapport à l'axe optique de la capsule.

Si les deux axes sont en coïncidence, l'image du filament se forme au milieu de la fente, pour une pression nulle, mais on perd la moitié de la hauteur du film. On placera donc l'axe optique de l'enregistreur de telle sorte qu'il passe

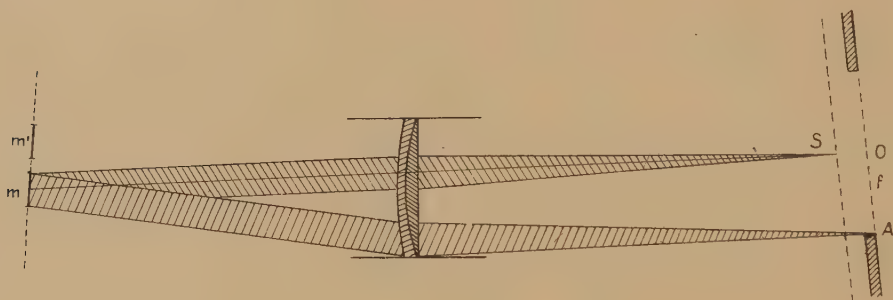


Fig. 8

S : source lumineuse, le filament vu en bout ; f : la fente ; O : milieu de la fente ;
m : miroir oscillant ; m' : miroir témoin ; A : bas de la fente

par le centre du miroir de la capsule mais qu'il fasse un petit angle avec l'axe du miroir au repos, cet angle étant déterminé par la double condition que le faisceau réfléchi passe au bord de l'objectif et que, réfracté à travers l'objectif, il donne une image au bas de la fente.

Pour préciser, l'angle maximum de rotation du miroir étant $1/20$ de radian, l'angle maximum de rotation du faisceau réfléchi est le double, soit $1/10$ de radian ; donc si l'on veut utiliser toute la largeur 6 cm de l'objectif il faut placer l'objectif à, au plus, 60 cm de la capsule et, dans ce cas, le faisceau réfracté longe la surface intérieure du tube porte-objectif et forme une image à 3 cm du milieu de la fente. A la déformation maximum donnant une rotation de $1/10$ de radian au faisceau réfléchi, il faut avoir la disposition symétrique de la position au repos par rapport à l'axe optique de l'enregistreur, donc une image à 3 cm du milieu de la fente et de l'autre côté. Le film doit donc être de 6 cm de largeur, au moins. On prend, en fait, des films commerciaux de $6\frac{1}{2} \times 11$, à huit poses, soit de 88 cm de long, qui permettent chacun deux films de prise de diagrammes.

L'angle des deux axes optiques est donc de $1/40$ de radian et l'on verra plus loin, à l'étude du « pied réglable », comment opérer pour obtenir facilement ce résultat.

Avant de poursuivre, on peut signaler que l'appareil enregistreur peut quand même servir à une distance supérieure à 60 cm, mais il faut prendre une membrane plus épaisse et l'on perd de l'amplitude dans l'inscription du diagramme. On peut signaler encore que le miroir témoin, parallèle à la position de repos du miroir oscillant, doit être placé du côté opposé au biseau de la tige de rappel, pour être sûr que le faisceau réfléchi par ce miroir témoin tombe à l'intérieur de l'objectif, même dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire lorsque l'objectif est distant de plus de 60 cm du miroir de la capsule manométrique.



Fig. 9

La courbe de transformation, angle α de rotation du miroir en déplacement y de l'image du filament sur la fente, en prenant comme origine de ces déplacements le bas de la fente, est :

$$y = 3^{\text{cm}} + 60^{\text{mm}} \times \text{tg} (2 \alpha - 0,05),$$

et cette courbe est de la forme Z, avec un point d'inflexion au milieu de l'arc utile pour $\alpha = 0,025$ radian.

La courbe résultante de la capsule manométrique a un point d'inflexion à l'origine et est légèrement en Z, en raison des dimensions choisies : 0,1 mm de flexion maximum, sur un diamètre de 16 mm, pour la membrane et $1/20$ de radian de rotation maximum, correspondant à une distance de 2 mm, entre les fonds de rainure de la face inférieure du miroir oscillant.

La courbe résultante totale étant la combinaison de deux courbes de même forme à points d'inflexion décalés, aura donc un point d'inflexion vers le premier tiers de l'arc utile et reste en forme Z aux environs de ce point, mais comme il est à prévoir que, pour de fortes pressions, l'ordonnée du spot ne peut être infinie, car la forme S de la courbe flèche de membrane-pression

doit finir par dominer au delà de l'arc utile, la courbe résultante totale devra donc se rabattre vers l'axe des pressions et, par conséquent, il doit y avoir vers la fin de l'arc utile, ou un peu au delà, un deuxième point d'inflexion. La figure 9 donne l'aspect général de cette courbe résultante, qui n'est autre que la courbe d'étalonnage de l'appareil entier; les courbures y ont été amplifiées pour montrer le mécanisme de la « rectification » mais, en pratique, on obtient effectivement une véritable droite dont aucune courbure ne peut être décelée, aux erreurs de lecture près, du manomètre témoin et des déplacements du spot.

S'il a été insisté si longuement sur ce développement, que l'on trouvera peut-être trop théorique et ne faisant pas intervenir toutes les conditions mécaniques inhérentes à la réalisation matérielle de l'appareil, c'est qu'il a été jugé nécessaire, dans ce domaine de la physique, de se méfier des simplifications d'infiniment petits, acceptables pour le mathématicien qui peut rendre ceux-ci aussi petits qu'il le veut, mais pas toujours pour le physicien où les infiniment petits ne sont, en réalité, que des quantités très petites, beaucoup moins dociles et dont l'ordre de grandeur n'est pas toujours en rapport avec l'ordre d'infinitude.

3^e Pied réglable et orientable.

Le problème n'est pas simple : il faut, en effet, pouvoir placer l'axe optique et le plan de symétrie de l'enregistreur en concordance, à $1/40$ de radian près, avec l'axe optique et le plan de symétrie de la capsule manométrique et les solutions onéreuses étaient à rejeter, *a priori*. Il fallait aussi prévoir la trépidation du sol au voisinage des moteurs, donc un ensemble rigide, sans porte-à-faux, réglable en hauteur, en largeur, en azimut et en inclinaison, soit deux mouvements de position et deux mouvements d'orientation chacun ayant dispositifs de déplacement rapide, lent et de blocage.

Le mécanisme essentiel de réglage est constitué par une tige filetée de fort diamètre, glissant librement dans un collier lisse assez long, et trois écrous à oreilles, deux d'un côté du collier, un de l'autre côté. Il est facile de voir que le collier lisse étant supposé fixe, la tige filetée peut se déplacer rapidement si les écrous sont placés assez loin et aussi tourner sur elle-même; il y a aussi un déplacement lent si l'on fait tourner un écrou, celui-ci venant contre le collier et si, en même temps, on empêche la vis de tourner, puis si un deuxième écrou vient contre le premier former contre-écrou; ceux-ci étant bloqués l'un contre l'autre, la tige filetée ne peut plus se déplacer latéralement, mais seulement tourner sur elle-même; enfin si le troisième écrou vient se bloquer contre le collier, de l'autre côté de celui-ci, la rotation elle-même devient lente, puis impossible.

Le pied réglable est constitué ainsi de trois parties articulées l'une sur l'autre par deux mécanismes du principe qui vient d'être décrit : un étrier, sur lequel se place et se fixe le boîtier enregistreur, cet étrier a deux tiges filetées latérales qui coulisent dans les deux colliers lisses d'une fourche, dont

le manche est une tige filetée qui coulisse dans l'axe creux lisse d'un bloc, venu de fonderie, constitué par un disque à trois ailettes inférieures, sur lesquelles viennent se fixer chacun des trois éléments coulissants d'un trépied en bois, d'un type commercial quelconque (*fig. 10*).

Cet appareil de support, avec tous ses réglages variés, doit être utilisé de façon très précise. On commence par fixer une mire de réglage au milieu de l'étrier, le centre de la mire étant à la place d'un point de l'axe optique du boîtier enregistreur qui, pour l'instant, n'est pas monté, puis l'étrier, placé dans la fourche, celle-ci dans le disque à ailettes, tous réglages libres. On visse la capsule manométrique dans un trou de bougie, dans un azimut convenable à l'aide d'un joint métalloplastique ou d'une forte bague en cuivre rouge recuit; il faut, en effet, que le biseau du couteau, autour duquel tourne le miroir

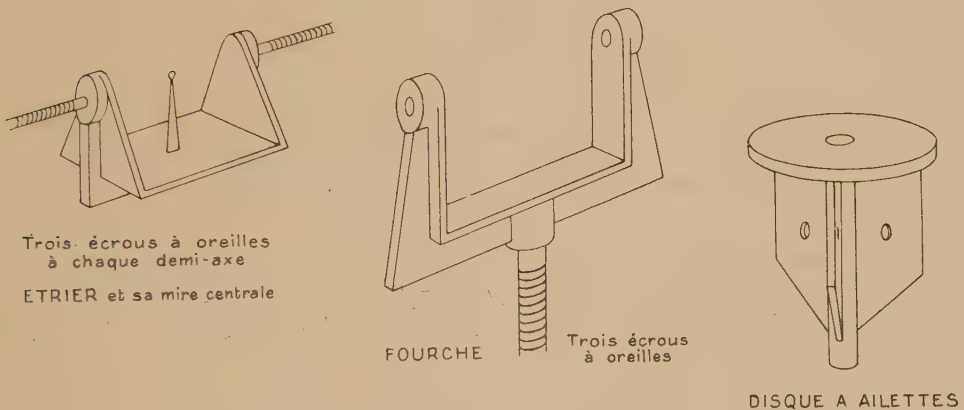


Fig. 10. — Pied réglable (hauteur maximum réelle : 1,70 m)

oscillant, soit horizontal. On repère, dans l'espace, l'axe optique de la capsule en regardant l'image d'un œil dans le petit miroir oscillant : il faut d'abord se placer assez près, puis s'éloigner peu à peu, et l'on dispose ensuite le pied réglable de façon que la mire se place un peu au-dessus de la ligne qui joint l'œil au miroir, ou un peu au-dessous, suivant que le miroir témoin est au-dessus ou au-dessous du miroir oscillant; il faut ensuite bloquer le double écrou de l'axe de la fourche, ce qui fixe celle-ci en hauteur.

On place alors l'enregistreur sur l'étrier, après avoir enlevé le tambour, de façon à pouvoir regarder de loin à travers l'objectif, ce qui permet de diriger l'axe optique de l'enregistreur vers la capsule manométrique dont il faudra voir l'image bien centrée dans l'objectif. On cale alors tous les réglages sans bloquer et l'on vérifie, en allumant la source lumineuse, que l'image du filament se forme au bas de la fente du cylindre, soit à l'aide d'un verre dépoli, soit simplement avec un papier blanc fin. On achève le réglage avec les écrous, puis on les bloque tous et l'on ajoute quelques haubans pour augmenter la rigidité au cas où la trépidation du sol est trop forte. Il suffit alors de mettre en place le tambour porte-film que l'on aura chargé en chambre noire.

Pour améliorer la stabilité de l'enregistreur et de son trépied, on disposera, entre les pointes ferrées et le sol, des plaques de feutre et l'on chargera chacun des pieds avec des masses assez lourdes placées le plus près possible du sol.

CAUSES D'ERREURS DIVERSES

1° Influence de l'espace « nuisible » sous la membrane.

Cette influence a été étudiée par de nombreux auteurs et semble avoir été l'objet d'une grande défiance, mais presque toujours ces auteurs se sont limités au calcul de la perte de charge en supposant le régime permanent et en chiffrant celui-ci sur un courant gazeux moyen. Il est hors de doute que la perte de charge existe et peut être importante si la canalisation est longue, mais les erreurs, dues à cet espace nuisible, sont de nature très variée et il est insuffisant de se limiter à un calcul de l'ordre de grandeur de la perte de charge.

Il est, sans doute, plus important de profiler le canal de communication en tuyère que de réduire le volume au minimum, car des tourbillonnements peuvent se produire si le canal présente un profil anguleux et, si l'on réduit au minimum le volume, il peut y avoir une déformation de la membrane ne suivant pas la loi prévue, puisqu'elle serait chargée surtout en son centre et non régulièrement sur toute sa surface. Toutefois, la condition profil en tuyère étant remplie, il importe que le volume de la canalisation soit le plus petit possible pour que le courant gazeux soit le plus faible possible car, outre la perte de charge, il y a altération de la combustion par création d'une turbulence locale à l'orifice de la canalisation.

Dans la capsule manométrique décrite plus haut, le canal de communication a une longueur totale de 22 mm et un volume 0,5 cm³, et les causes d'erreurs décrites sont évitées au mieux et sont certainement négligeables aux trois points principaux du diagramme de montée en pression : c'est-à-dire au moment de l'allumage où la pression varie peu, au moment de la plus grande vitesse de montée en pression où le courant gazeux, passant par une vitesse maximum, donne la perte de charge maximum, donc la plus forte erreur en pression, mais la moindre en $\frac{dp}{dt}$; enfin, au moment de la pression maximum où il y a encore un déphasage important, mais une valeur assez bonne de la pression elle-même.

2° Influence de la température de la membrane.

La membrane a été choisie plane par raison d'économie, mais on verra qu'un profil courbe serait plus intéressant à bien des points de vue qui seront développés au chapitre IV. Elle est en élinvar, qui possède une limite élastique élevée et une réactivité pratiquement nulle jusqu'à 50°C, théoriquement, mais pratiquement, bien au delà de la température de 150 à 200° que peut atteindre

la membrane s'il n'y a pas de fuite, comme on peut s'en rendre compte par des essais de lames vibrantes d'acier ordinaire et d'acier élinvar chauffées ou non. Il n'y a donc pas à craindre l'établissement de tensions internes dénaturant la loi de déformation.

3° Influence de l'encastrement de la membrane sous la couronne.

Cette influence est très grande et il est absolument nécessaire que le plat, sous la couronne, soit absolument parfait. On verra plus loin que le profil de la membrane déformée peut s'écrire $z = f \frac{(a^2 - r^2)^2}{a^4}$, soit au maximum, avec $f = 0,1$ mm et $a = 8$ mm :

$$z = 0,1 \left(1 - \frac{r^2}{64} \right)^2$$

donc, pour $r = 7$ mm, on a $z = 0,0055$ mm, soit environ 1/200 de mm, c'est-à-dire que si le plat de la couronne n'est pas précis au 1/200 de mm, la membrane pourrait avoir une surface active de 9 mm de rayon au lieu de 8. Or, comme la flèche au centre est proportionnelle à a^4 , la nouvelle valeur serait $\left(\frac{9}{8}\right)^4 \neq 1,6$ de l'ancienne valeur.

Il est donc nécessaire que ce point soit très surveillé, c'est-à-dire que le plat, sous la couronne, soit cimenté à la périphérie intérieure, meulé à plat, avec la plus grande précision possible, sur un lapidaire à miroir et vérifié souvent par un procédé optique quelconque, ou encore que l'étalement statique soit vérifié souvent.

Il est à remarquer qu'une membrane de plus faible diamètre serait encore plus sujette à ce genre d'erreur.

4° Influence de la tige de rappel, du miroir mobile et des couteaux.

La tige de rappel doit avoir une longueur constante, ce qui se vérifie facilement à l'aide du miroir témoin, et surtout son biseau doit être à angle vif, ce qui est facile à vérifier mais, comme le biseau ne frotte pas dans sa rainure, il s'use peu; il en est de même du couteau. Le miroir oscillant est en acier plus dur que la tige de rappel et le couteau; les rainures sont à angle vif et ne se creusent pas à l'usage.

5° Influence de la nature de l'objectif.

L'objectif, travaillant avec une ouverture $\frac{r}{f} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$, peut être simplement achromatique; il importe seulement qu'il soit en verre très clair pour avoir le maximum de transparence. Il faut aussi le prendre plan convexe, la face plane tournée vers la source lumineuse.

6° Influence de la source lumineuse.

La source lumineuse doit être une lampe à filament rectiligne assez épais, de l'ordre de 5 à 6 dixièmes de mm, ou une lampe à filament spiralé, comme celle des phares d'auto. L'épaisseur du filament donne un spot carré un peu gros mais, à l'enregistrement photographique, le trait peut être plus fin, par suite de la grande rapidité de circulation du film. La largeur de la fente du cylindre enregistreur doit être du même ordre. Il ne faut pas, en effet, rechercher le filament très fin ni la fente très fine, car un point du film est impressionné tout le temps qu'il traverse le spot et si l'on faisait celui-ci trop petit le temps d'impression risquerait d'être insuffisant. On constate ainsi qu'à la montée en pression le trait est plus fin, mais aussi plus pâle.

A de très grandes vitesses, même en survoltant très fortement la lampe, il est possible que le diagramme apparaisse mal au développement. On peut alors avoir recours à une inversion photographique, en procédant de la manière suivante : le film — très rapide, panchromatique, par exemple — est d'abord développé à la lumière verte, et dès qu'apparaît le diagramme en noir sur blanc, on allume une lampe rouge ordinaire, placée à un mètre environ ; le développement est continué et le film paraît être progressivement voilé ; on pousse le développement au maximum jusqu'à ce que le voile général paraisse bien opaque, puis on fixe et on lave, et l'on voit apparaître un diagramme très apparent en clair sur noir. Il y a eu simplement inversion due à ce que le diagramme primitivement développé, et qui est resté superficiel dans la couche sensible, y a fonctionné comme écran local en protégeant la couche sensible sous-jacente, alors que tout le reste de l'émulsion était voilé à fond. De tels diagrammes inversés peuvent être assez vigoureux pour être publiés aussi nettement qu'un trait à l'encre sur papier blanc.

7° Valeur de la signalisation électrique fournie par l'éclateur.

L'aspect présenté par l'enregistrement d'une étincelle de magnéto illuminant la fente du cylindre est très complexe aux grandes vitesses et l'on peut y déceler l'effluve et toutes les étincelles secondaires, le tout s'étalant sur 10 mm, soit 10 degrés ou 20 degrés manivelle, suivant l'entraînement du film.

Les électrodes de l'éclateur sont en fer et donnent des étincelles très actiniques, mais le phénomène le plus gênant est que c'est l'effluve qui, en réalité, signale les points du cycle. Les deux étincelles représentées *figure 11* ont été enregistrées sur un diagramme de compression, le moteur tournant à 2 400 tours ; le tambour, entraîné à demi-vitesse, tournait donc à 1 200 tours (1 mm du film correspond à 2 degrés manivelle). L'une et l'autre peuvent se détailler ainsi : une effluve ondulée de 2,5 mm de largeur, puis un vide de même largeur, puis l'étincelle principale, très noire, que l'on est tenté de prendre pour signal, puis six étincelles secondaires écartées de 1 mm et il faut rappeler que le millimètre du film correspond à 2 degrés manivelle et, à cette vitesse, à $14 \cdot 10^{-5}$ seconde ; donc, prendre l'étincelle principale comme signal serait faire une erreur de 10 degrés manivelle puisqu'il y a 5 mm entre le début de

l'effluve et l'étincelle principale. C'est, évidemment, le temps qui reste sensiblement constant; donc, à des vitesses moindres, l'erreur est moins forte mais tout de même inacceptable. Il est donc nécessaire d'avoir un phénomène électrique très actif pour qu'apparaisse l'effluve, ou si l'on veut se contenter de l'étincelle principale, faire la correction de temps, et non d'angle qui, dans les circonstances de l'essai considéré, est de 0,0007 sec entre le début de

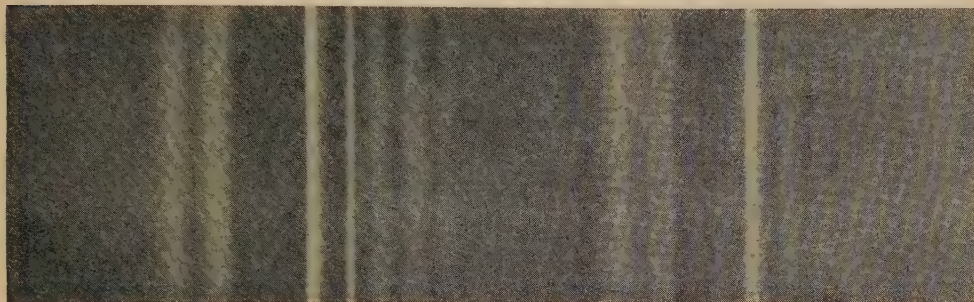


Fig. 11

l'effluve, signal vrai, et l'étincelle principale, signal approché. Il sera utile, en outre, de faire des essais comparatifs de la signalisation électrique et d'une signalisation par miroir tournant calé sur l'arbre du moteur, miroir tournant sur lequel on fera tomber le faisceau de lumière parallèle émis par l'appareil enregistreur lui-même : le spot décrit alors des sinusoides où l'on précise le point de calage du miroir tournant par un écran local percé d'un trou fin.

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE III

FRÉQUENCE PROPRE DES MEMBRANES PLANES ET RELATION ENTRE LA FRÉQUENCE ET LA SENSIBILITÉ

MEMBRANES PLANES ENCASTRÉES

Une membrane plane circulaire encastrée, de rayon a , d'épaisseur e , soumise à une pression uniforme p , se déforme suivant la loi que l'on trouve dans les traités spéciaux d'élasticité et qui donne l'équation de la méridienne :

$$z = \frac{Pa^4}{64 D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \quad \text{où} \quad D = \frac{EI}{1 - \sigma^2},$$

coefficient élastique où E est le module d'élasticité, I le moment d'inertie du segment de droite mesurant l'épaisseur e par rapport à son milieu, c'est-à-dire $I = \frac{e^3}{12}$, et σ le coefficient de Poisson.

Dans la plupart des traités d'élasticité on prend souvent la demi-épaisseur h pour raisonner commodément par rapport à la surface neutre mais, pour éviter toute confusion, il sera pris ici l'épaisseur e elle-même, et ainsi $e = 2 h$.

Cette équation de la déformée statique sous la pression uniforme P est établie en écrivant l'équilibre de la pression et des tensions sur un trapèze curviligne compris entre deux parallèles et deux méridiens. Le problème est plus complexe que celui de la poutre encastrée aux deux bouts et fléchissant sous son propre poids (qui donne cependant une équation de même forme), par suite de l'intervention des moments fléchissants latéraux, d'où l'introduction du coefficient de Poisson. Ainsi la poutre de longueur $2 a$, d'épaisseur e , de même matière que la membrane, fléchit environ trois fois plus que celle-ci, alors que l'on aurait trouvé un rapport 2 si l'on avait négligé les moments latéraux.

Puisque l'on connaît la déformée il est facile de calculer les énergies potentielle et cinétique : en effet, les forces extérieures, ici, s'appliquent directement à chaque élément; toutefois, le raisonnement n'est pas absolument rigoureux car la déformée, calculée statiquement, n'est pas la déformée en vibration, puisque les inerties agissent sur les tensions. On démontre que la différence est peu sensible et, pour le but poursuivi ici, elle est négligeable.

L'énergie potentielle de déformation est, pour un anneau de membrane compris entre les parallèles r et $r + dr$, donc de surface $2\pi \cdot r \cdot dr$, donc soumis à la force extérieure $2\pi \cdot r \cdot dr \cdot P$, donnée par le travail de cette force dont le point d'application se déplace de dz . Pour simplifier le calcul on posera $z_0 = \frac{Pa^4}{64D}$: c'est la cote du centre de la membrane. On a donc :

Energie d'un anneau :

$$2\pi \cdot r \cdot dr \cdot P \cdot dz = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot P \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 dz_0;$$

Energie de la membrane entière pour un déplacement dz_0 du centre :

$$\pi \cdot P \cdot dz_0 \cdot a^2 \cdot \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \frac{2r dr}{a^2} = \frac{\pi a^2}{3} \cdot P \cdot dz_0.$$

Il faut maintenant intégrer de 0 à z_0 pour avoir l'énergie de déformation totale quand le centre de la membrane a pour cote z_0 mais, dans l'expression précédente, P est fonction de z_0 par $P = \frac{64D}{a^4} z_0$, d'où :

Energie potentielle totale :

$$\frac{\pi a^2}{3} \int_0^{z_0} \frac{64D}{a^4} z_0 \cdot dz_0 = \frac{64 \cdot \pi \cdot D}{3 a^2} \frac{z_0^2}{2}.$$

L'énergie cinétique, pour le même anneau de membrane, est :

$$\frac{1}{2} \cdot dm \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r dr \cdot \delta \cdot e \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^4 \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2,$$

où δ est la masse spécifique.

Soit, en intégrant pour toute la membrane :

Energie cinétique totale :

$$\frac{1}{2} \pi a^2 \cdot \delta \cdot e \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^4 \frac{2r dr}{a^2} = \frac{\pi a^2 \cdot \delta \cdot e}{5} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2.$$

Donc le centre de la membrane est régi par l'équation :

$$\frac{\pi a^2 \cdot \delta \cdot e}{5} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2 + \frac{64 \cdot \pi \cdot D}{3 a^2} \cdot \frac{z_0^2}{2} = \text{const}$$

ou, en simplifiant, puis dérivant et simplifiant à nouveau :

$$\frac{a^2 \cdot \delta \cdot e}{5} \frac{d^2 z_0}{dt^2} + \frac{64 D}{3 a^2} z_0 = 0,$$

qui montre que z_0 vibre avec une période $\frac{2 \pi}{\omega}$, où $\omega^2 = \frac{5 \cdot 64 \cdot D}{3 \cdot a^4 \cdot \delta \cdot e}$.

On peut maintenant remplacer D par sa valeur, avec $I = \frac{e^3}{12}$, soit :

$$D = \frac{EI}{1 - \sigma^2} = \frac{E \cdot e^3}{12 (1 - \sigma^2)};$$

donc :

$$\omega^2 = \frac{5 \cdot 64 \cdot E \cdot e^3}{3 \cdot a^4 \cdot \delta \cdot e \cdot 12 \cdot (1 - \sigma^2)} = \frac{80}{9} \cdot \frac{e^2}{a^4} \cdot \frac{E}{\delta \cdot (1 - \sigma^2)},$$

et

$$\omega = 2,98 \cdot \frac{e}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\delta \cdot (1 - \sigma^2)}}.$$

La fréquence est donc :

$$N = \frac{\omega}{2 \pi} = \frac{2,98}{2 \pi} \cdot \frac{e}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\delta \cdot (1 - \sigma^2)}} = 0,47 \cdot \frac{e}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\delta \cdot (1 - \sigma^2)}}.$$

Une théorie plus précise, établie par Lord KELVIN, tenant compte de l'influence des inerties sur les tensions et établissant la déformée en vibration, montre que la membrane vibre suivant plusieurs fréquences dont la fréquence fondamentale est donnée par la formule précédente, sauf qu'au lieu de 2,98 on a 2,95, donc une erreur de 1/100.

La fréquence est donc, pour une matière donnée, proportionnelle à l'épaisseur et, inversement, proportionnelle au carré du diamètre.

RELATION ENTRE LA FRÉQUENCE ET LA SENSIBILITÉ

Les équations précédentes, qui présentaient le mouvement du centre de la membrane comme un mouvement pendulaire, peuvent s'interpréter de façon intéressante par comparaison au mouvement du pendule simple constitué par une masse M rappelée par un ressort de masse négligeable et de raideur K et pour lequel on a directement :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = 0,$$

ou par les énergies :

$$M \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{Kx^2}{2} = \text{const.}$$

Dans le cas présent, le coefficient jouant le rôle de la masse est $M_1 = \frac{\Pi a^2 \cdot \delta \cdot e}{5}$; c'est donc le cinquième de la masse libre de la membrane et pourrait être appelé masse équivalente ramenée au mouvement du centre. Le coefficient jouant le rôle de raideur est :

$$K = \frac{64 \cdot \Pi \cdot D}{3 a^2} = \frac{16 \Pi \cdot E \cdot e^3}{9 a^2 (1 - \sigma^2)},$$

et il est intéressant de chercher une relation entre ce coefficient de raideur et la sensibilité :

$$S = \frac{z_0}{P} = \frac{a^4}{64 D}.$$

On a $K \cdot S = \frac{\Pi a^2}{3}$, où Πa^2 représente la surface de la membrane. Pour avoir une notion plus claire encore on peut introduire la sensibilité à la force de pression $P \cdot \Pi a^2$ au lieu de la sensibilité à la pression seule, soit S' cette nouvelle sensibilité : on aura alors $K \cdot S' = \frac{1}{3}$; donc le coefficient de raideur n'est autre que le tiers de l'inverse de la sensibilité de la membrane à la charge totale qui agit sur elle. Toutefois, il est préférable de garder la notion de sensibilité à la pression qui est une grandeur plus directement utilisable, et il vaut mieux revenir à la première définition de S , soit :

$$S = \frac{z_0}{P} = \frac{a^4}{64 D} = \frac{3 a^4 (1 - \sigma^2)}{16 \cdot e^3 \cdot E},$$

et l'on peut alors former le produit de cette sensibilité par le carré de la fréquence; il vient :

$$S \times N^2 = S \times \frac{\omega^2}{4 \Pi^2} = \frac{5}{12 \Pi^2 \cdot \delta \cdot e} \cdot \frac{1}{e}.$$

Ainsi, pour une sensibilité donnée, grandeur fixée pour que le manographe utilise toute la largeur du film, la fréquence est indépendante du diamètre, inversement proportionnelle à la densité et à l'épaisseur et indépendante de l'élasticité de la matière employée, mais ce résultat n'est pas utilisable tel que puisque, la sensibilité étant donnée, le diamètre et l'élasticité agissent par l'intermédiaire de l'épaisseur e .

Pour arriver à une conclusion pratique on peut se fixer de choisir la fréquence la plus grande possible, donc δ et e , les plus faibles possibles pour

une sensibilité donnée; diminuer e impose de diminuer le diamètre $2a$ par la relation $\frac{a^4}{e^3} = \text{const}$, donc, en gros, proportionnellement à e , ou d'augmenter le coefficient élastique $\frac{E}{1 - \sigma^2}$. Il faut donc prendre des membranes minces de petit diamètre, légères et de coefficient élastique élevé. Toutefois ces conditions, en apparence bien faciles à réaliser, sont contrecarrées par des conditions contraires qui veulent que la déformation reste élastique, donc impose un diamètre minimum pour une sensibilité donnée; il faut aussi une certaine épaisseur et un diamètre minimum pour que l'équipage mobile qui appuie sur la membrane n'altère pas le fonctionnement de celle-ci.

CHAPITRE IV

MEMBRANES NON PLANES

Il est, évidemment, impossible à un manographe photomécanique de soutenir la comparaison, à propos des fréquences, avec le manographe photocathodique de LABARTHE ⁽¹⁾ qui utilise des membranes très petites, dont la sensibilité est très inférieure à celle nécessaire aux membranes qui doivent entraîner un équipement mobile, mais il peut être intéressant d'étudier ce que donneraient des membranes non planes.

SERRUYS ⁽²⁾ a tenté un essai intéressant qui consiste à utiliser une membrane conique, donc plus raide que la membrane plane, mais si la fréquence doit alors augmenter, à diamètre, épaisseur égale et matière identique, il est évident que la sensibilité doit diminuer; la question demeure donc entière et il est nécessaire de l'étudier plus à fond, bien qu'on ne puisse espérer de résultats numériques précis en raison de la complexité mathématique du problème.

Deux tendances se sont manifestées pour les membranes non planes : celle de SERRUYS, qui est d'augmenter la raideur « géométrique », et celle, utilisée dans les baromètres enregistreurs et les phonographes, qui est de diminuer la raideur en prenant des membranes de révolution à méridienne ondulée, les baromètres en vue d'augmenter la sensibilité sans souci des fréquences, les phonographes d'augmenter la sensibilité, tout en maintenant la fréquence élevée, et ces deux tendances s'opposent absolument.

MEMBRANE CONIQUE

Le calcul, fait par SERRUYS, de la sensibilité d'une membrane conique est incomplet, puisqu'il imagine seulement que sa membrane travaille à l'allongement de la génératrice, alors qu'elle subit certainement une courbure et l'on peut même admettre, *a priori*, puisque le cône est très ouvert, que la déformation en z a sensiblement la même forme d'équation que la membrane plane,

(1) LABARTHE, *Publications scientifiques du Ministère de l'Air*, n° 96.

(2) SERRUYS, *Publications scientifiques du Ministère de l'Air*, n° 103.

mais avec un coefficient plus faible, puisque les moments fléchissants latéraux sont plus forts, les allongements de méridiens étant nettement plus élevés que pour la membrane plane.

Pour préciser, on a reporté sur la *figure 12* les déformées des membranes planes et coniques de même diamètre, de même épaisseur et de même matière. Le déplacement du point M de la membrane plane en M' est donné par la formule $z = z_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2$, où $z_0 = \frac{Pa^4}{64 D}$, et le déplacement y du point N, de la membrane conique, en N', est donné par la formule $y = y_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2$, où y_0 serait donné par $y_0 = \frac{Pa^4}{A \cdot D'}$, le coefficient élastique A . D' étant supérieur à 64 D, suivant une loi non précisée.

En réalité, le point N devrait être plus éloigné de l'axe que le point N' car les allongements de méridiens sont maintenant du premier ordre et

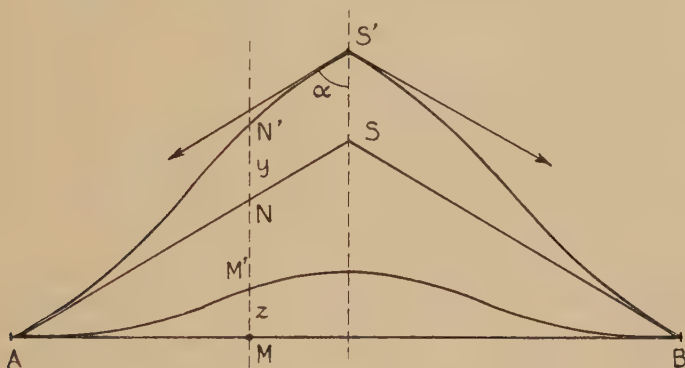


Fig. 12

imposent certainement aux parallèles des allongements de même ordre infinitésimal, et en négligeant cette obliquité de NN' par rapport à l'axe on admet, pour la sensibilité $\frac{SS'}{P}$, une valeur supérieure à sa valeur vraie.

Dans cette hypothèse de déformation et en appelant α le demi-angle au sommet du cône, la masse équivalente restant toujours le cinquième de la masse vraie, celle-ci étant augmentée dans le rapport $\frac{1}{\sin \alpha}$, on trouve que l'énergie cinétique totale devient :

$$\frac{\Pi a^2 \cdot \delta \cdot e}{5 \sin \alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d \Delta z}{dt}\right)^2.$$

De même, le calcul de l'énergie potentielle de déformation peut se faire en remarquant que la composante axiale de la pression travaille seule et l'on trouve $\frac{\Pi a^2 A \cdot D' (\Delta z)^2}{3 \cdot a^4 \cdot 2}$, le coefficient 64 D étant simplement remplacé par A . D'.

Dans ces conditions, on trouve :

$$\omega_1^2 = \frac{\pi a^2}{3} \frac{A \cdot D'}{a^4} \cdot \frac{5 \sin \alpha}{\pi a^2 \cdot \delta \cdot e} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_1^2}{\omega^2} = \frac{A \cdot D' \sin \alpha}{64 D},$$

qui est aussi égal au carré du rapport des fréquences.

Il y a donc une cause d'augmentation par $\frac{A \cdot D'}{64 D}$, mais aussi une cause de diminution par $\sin \alpha$, la première due à une augmentation de raideur, la seconde due à une augmentation de masse, et il semble bien que l'on ne puisse conclure sans expliciter le coefficient $A \cdot D'$, les deux coefficients différant des valeurs principales par deux infiniment petits du deuxième ordre en $90^\circ - \alpha$.

Il en serait de même pour toute membrane convexe et il est à craindre que, pour toutes ces membranes, la perte de sensibilité et le gain en fréquence ne soient du même ordre de grandeur que perte et gain d'une membrane plane à une autre membrane plane simplement un peu plus épaisse.

MEMBRANE ONDULÉE

La qualité évidente d'une membrane ondulée, la seule qualité qu'on puisse, à *priori*, lui accorder, est qu'elle peut fléchir sans allongement de méridien. On imagine sans effort la membrane ondulée comme formée d'un réseau de méridiens et de parallèles, les premiers pouvant travailler en flexion sans allongements, les seconds ne pouvant travailler en flexion que simultanément à un allongement. Le travail en flexion absorbe beaucoup plus d'énergie potentielle que le travail à l'allongement, puisque les points d'application des forces extérieures se déplacent beaucoup plus; on peut donc admettre, pour une membrane ondulée, que les parallèles restent sensiblement constants et que, seuls, les méridiens travaillent à la flexion.

La question qui se pose est maintenant très précise : il faut augmenter le plus possible la sensibilité, c'est-à-dire le déplacement du centre, sans que la fréquence diminue trop, et l'étude du profil de la méridienne devra être orientée en ce sens : déplacements relatifs importants au centre et faibles sur les flancs, en entendant par déplacements relatifs, non pas le déplacement par rapport à la position de repos, mais par rapport à l'élément voisin, c'est-à-dire le dz important au centre et faible sur les flancs; il est, en effet, évident que différents types de méridiennes peuvent donner, intégrés à toute la membrane, les mêmes énergies potentielle et cinétique, donc la même fréquence, mais que le type le plus avantageux sera celui qui donne le plus grand déplacement au centre.

Dans ces conditions il ne doit y avoir au centre ni plat ni cône, donc il faut que la méridienne présente au milieu un point de rebroussement et il ne faut pas non plus que la méridienne présente de renversement de courbure,

c'est-à-dire de points d'inflexion. Il faudra que la méridienne comporte une seule arche de l'encastrement au point de rebroussement du centre.

En effet il faut, par tous les moyens, faciliter le travail en flexion des méridiens : or un cône au centre crée une zone de raideur, un plat aussi, quoique moins sensible; de même une inflexion sur les flancs, c'est-à-dire à rayon de courbure infini, correspond à un arc de méridienne quasi rectiligne qui ne peut fléchir qu'en se raccourcissant, donc en faisant travailler les parallèles sur lesquels il s'appuie.

Pour entreprendre un calcul ayant quelque sens, il faudrait prendre la méridienne par ses deux coordonnées z et r , en fonction de l'arc s , et écrire les équations d'équilibre des tensions pour un petit trapèze curviligne compris entre deux parallèles et deux méridiens. En effet, la variation de courbure de la méridienne entraîne une variation du rayon de courbure principal des parallèles puisque le centre principal des parallèles, considéré comme ligne de courbure, est l'intersection de la normale à la méridienne et de l'axe de la membrane. Les moments fléchissants latéraux apparaissent donc, bien que les parallèles gardent un rayon constant, et le calcul ne peut être entrepris sans hypothèse préalable sur le profil de la méridienne.

Toutefois, on peut se faire une idée de la solution en comparant non plus des membranes, mais des poutres de profil courbe et la poutre rectiligne. Les résultats ne seront pas transposables aux membranes, comme il sera précisé plus loin, mais ils sont vraisemblablement de même ordre.

COMPARAISON D'UNE POUTRE COURBE ET D'UNE POUTRE RECTILIGNE

Soient z et r les cote et abscisse d'un point d'une poutre courbe en fonction de l'arc s , en prenant comme origine le milieu de la poutre. Soit σ l'abscisse curviligne de l'encastrement, $2a$ la portée de l'encastrement, R le rayon de courbure en un point M d'abscisse rectiligne r , d'abscisse curviligne s et de cote z . Les mêmes lettres, marquées de l'indice zéro, désigneront la position de repos M_0 de M . Cette fois on ne peut plus supposer les r constants et le déplacement $M_0 M$ peut être oblique.

La poutre soumise à une charge répartie uniformément, par exemple son propre poids, la charge unitaire étant désignée par P , on a les équations d'équilibre classiques :

$$C = EI \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right);$$

$$T = -\frac{dC}{ds} = \frac{d}{ds} \left[-EI \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right] \quad \text{et} \quad P = \frac{d^2 C}{ds^2} = EI \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right).$$

En intégrant deux fois il vient :

$$EI \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) = \frac{Ps^2}{2} + B,$$

le terme du premier degré étant nul par raison de symétrie.

Soit α l'angle de la tangente au profil et de l'axe des r ; on a $\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$, et l'on peut encore intégrer une fois, soit :

$$EI (\alpha - \alpha_0) = \frac{Ps^3}{6} + Bs,$$

la constante d'intégration étant nulle par symétrie, et l'on peut maintenant préciser B puisque, pour $s = \sigma$, c'est-à-dire à l'encastrement, on doit avoir $\alpha - \alpha_0 = 0$; il vient donc :

$$EI (\alpha - \alpha_0) = \frac{Ps}{6} (s^2 - \sigma^2).$$

Pour aller plus loin, on peut remarquer que l'on a $\frac{dz}{ds} = \sin \alpha$ et $\frac{dr}{ds} = \cos \alpha$ et qu'il est permis de supposer que l'angle α ne diffère de l'angle α_0 que de quelques degrés au plus, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d(z - z_0)}{ds} = \sin \alpha - \sin \alpha_0 = 2 \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \alpha_0}{2} \approx (\alpha - \alpha_0) \cdot \cos \alpha_0$$

et

$$\frac{d(r - r_0)}{ds} = \cos \alpha - \cos \alpha_0 = -2 \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \alpha_0}{2} \approx -(\alpha - \alpha_0) \cdot \sin \alpha_0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{d(z - z_0)}{ds} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Ps}{6} (s^2 - \sigma^2) \cdot \cos \alpha_0, \\ \frac{d(r - r_0)}{ds} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{Ps}{6} (s^2 - \sigma^2) \cdot \sin \alpha_0; \end{cases}$$

et maintenant on ne peut intégrer plus loin, puisque $\sin \alpha_0$ et $\cos \alpha_0$, fonctions de l'arc s sont les cosinus directeurs de la tangente au profil encore inconnu; toutefois on a localisé l'arbitraire de ce profil à ses cosinus directeurs en chaque point.

On peut alors considérer un cylindre droit, ayant pour section droite le profil cherché, et inscrire sur ce cylindre la courbe $Z = \frac{P}{6EI} \cdot s \cdot (s^2 - \sigma^2)$;

l'aire limitée entre deux génératrices d'abscisses curvilignes s et $s + ds$, la section droite et la courbe Z a donc pour valeur $\frac{P}{6EI} s (s^2 - s^2) . ds$, et les projections de cette aire élémentaire, sur le plan horizontal et sur le plan frontal définis par l'axe des r et l'axe des z du profil et la direction des génératrices, sont précisément cette aire élémentaire multipliée par les cosinus

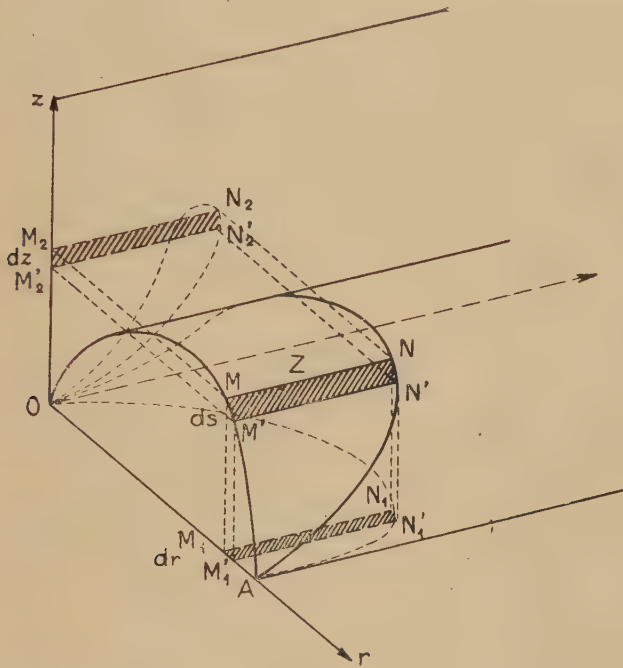


Fig. 13

correspondants $\frac{dr_0}{ds}$ et $\frac{dz_0}{ds}$, c'est-à-dire $\cos \alpha_0$ et $\sin \alpha_0$, c'est-à-dire, en se reportant à la figure 13 :

$$\frac{d(z - z_0)}{ds} = \text{aire } M_1 M'_1 N'_1 N_1,$$

projection de l'aire élémentaire $Z . ds$ sur le plan des r , et

$$\frac{d(r - r_0)}{ds} = \text{aire } M_2 M'_2 N'_2 N_2,$$

projection de l'aire élémentaire $Z . ds$ sur le plan des z , puisque l'angle α est l'angle de MM' avec Or .

L'intégration graphique montre donc que le déplacement total $z - z_0$, du point M en cote, est l'aire limitée par la courbe Z inscrite sur le cylindre,

puis projetée sur le plan des r et par l'ordonnée $M_1 N_1$, soit l'aire curviligne $OM_1 N_1$, et que de même le déplacement total $r - r_0$ du point M en abscisse rectiligne est l'aire $OM_2 N_2$.

En construisant la courbe $Z = \frac{P}{6EI} s (s^2 - \sigma^2)$, on obtient, avec le tableau :

s	O	$\frac{\sigma\sqrt{3}}{3} \neq 0,57 \sigma$	σ
Z	O	$-\frac{2\sqrt{3} \cdot \sigma^3}{9} \times \frac{P}{6EI}$	O

la courbe (fig. 14) :

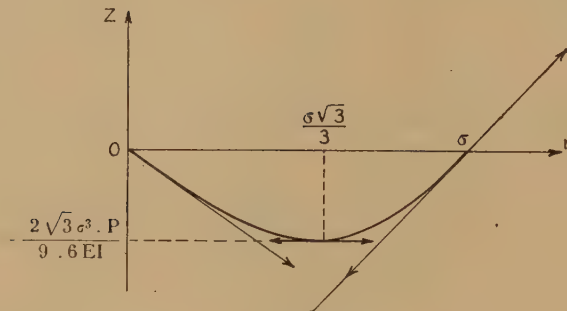


Fig. 14

On peut chercher maintenant à déterminer le profil qui, pour un σ et un a donnés, donnera la plus grande flèche au centre de la poutre. Or, cette flèche est l'aire totale de la courbe projetée sur le plan des r .

Le problème de la poutre de plus grande sensibilité peut donc se résoudre graphiquement, ou tout au moins on peut graphiquement comparer deux profils différents, si l'on ne peut trouver le profil optimum; et ce problème présente un grand intérêt car il est évident qu'il y a une infinité de profil de demi-portée a et de demi-longueur σ ayant même énergie potentielle et même énergie cinétique, donc même période, mais que la sensibilité au centre varie suivant le profil adopté. Il faut, évidemment, que le facteur projetant $\cos \alpha_0$ soit grand pour les grandes valeurs de Z et petit pour les petites valeurs de Z .

Pour traiter à fond un exemple numérique, à seule fin de savoir si ce qu'on peut gagner en sensibilité sur la membrane plane n'est pas perdu en fréquence, on peut considérer l'exemple simple :

$$\frac{dr}{ds} = \cos \alpha_0 = \frac{3\sqrt{3} s (s^2 - \sigma^2)}{2 \sigma^3},$$

qui est nul pour $s = 0$ et $s = \sigma$, et a pour maximum 1 pour $s = \sigma \frac{\sqrt{3}}{3}$, pour lequel Z est maximum, c'est-à-dire l'exemple où $\frac{dr}{ds} = \cos \alpha_0$ est proportionnel à Z .

Tous les calculs peuvent être achevés complètement : on trouve r en intégrant :

$$\frac{dr}{ds} = \cos \alpha_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sigma^3} s (s^2 - \sigma^2);$$

on trouve z_0 en intégrant :

$$\frac{dz_0}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2},$$

radical du sixième degré en s , mais où il y a une racine double évidente $s^2 = \frac{\sigma^2}{3}$, l'autre racine étant $s^2 = \frac{4}{3}\sigma^2$.

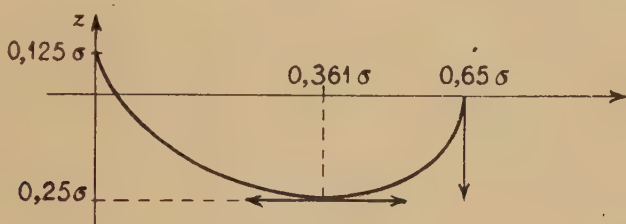


Fig. 15

On trouve enfin $z - z_0$ en intégrant $Z \cdot \cos \alpha_0$ et l'on pourrait aussi trouver $r - r_0$ en intégrant $Z \cdot \sin \alpha_0$.

Les résultats sont :

$$r = \frac{3\sqrt{3}}{8\sigma^3} s^2 (s^2 - 2\sigma^2),$$

$$z_0 = \frac{\sigma}{8} - s \left(1 - \frac{3s^2}{4\sigma^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$z - z_0 = \frac{P\sigma^4}{EI} \frac{\sqrt{3}}{420} \left[8 - 35 \left(\frac{s}{\sigma}\right)^2 + 42 \left(\frac{s}{\sigma}\right)^5 - 15 \left(\frac{s}{\sigma}\right)^7\right];$$

donc la flèche au centre est $f = \frac{P\sigma^4}{EI} \frac{2\sqrt{3}}{105}$, valeur que l'on peut exprimer en fonction de la demi-portée a , puisque pour $s = \sigma$ on a $a = r_{s=\sigma} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\sigma$, d'où la flèche au centre en fonction de la demi-portée a (fig. 15) :

$$f = \frac{Pa^4}{EI} \times 0,185.$$

La poutre rectiligne encastrée aux deux bouts fléchit au centre de

$$f_1 = \frac{Pa^4}{24 EI} = \frac{Pa^4}{EI} \times 0,042.$$

Donc, la poutre courbe fléchit environ 4,45 fois plus que la poutre rectiligne et ainsi la sensibilité est 4,45 fois plus grande, mais il faut calculer la fréquence correspondante pour faire une comparaison valable.

Par le calcul des énergies potentielle et cinétique, possible sur l'exemple numérique où profil et déformée sont connus on trouve, en négligeant les déplacements perpendiculaires à l'axe :

$$\text{Energie potentielle totale : } \frac{EI}{\sigma^3} \frac{105 \times 35}{128 \cdot \sqrt{3}} \frac{1}{2} \cdot f^2,$$

$$\text{Energie cinétique : } \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dt} \right)^2 \frac{\delta \cdot e}{64} \sigma \times 28,229,$$

d'où :

$$\omega^2 = \frac{EI}{a^4 \cdot \delta \cdot e} \frac{105 \times 35}{2 \sqrt{3} \times 28,229} \times \left(\frac{a}{\sigma} \right)^4 = \frac{EI}{a^4 \cdot \delta \cdot e} \times 6,7.$$

De même, pour la poutre rectiligne, on trouve :

$$\text{Energie potentielle totale : } \frac{14 EI}{a^3} \cdot \frac{1}{2} f_1^2,$$

$$\text{Energie cinétique : } \frac{1}{2} \left(\frac{df_1}{dt} \right)^2 \cdot a \cdot \delta \cdot e \frac{128}{315},$$

d'où :

$$\omega_1^2 = \frac{EI}{a^4 \cdot \delta \cdot e} \times 34,453,$$

et l'on a :

$$\frac{\omega_1^2}{\omega^2} = \frac{34,453}{6,7} = 5,15 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_1}{\omega} = 2,27.$$

En résumé, la poutre courbe donne une sensibilité 4,45 fois plus forte mais une fréquence 2,27 fois plus faible. Toutefois, pour que la comparaison du profil ait un sens utilisable, il faut chercher la fréquence d'une poutre courbe de demi-portée a' plus petite que a , mais de même sensibilité que la poutre rectiligne de demi-portée a , c'est-à-dire en gardant toujours la même épaisseur et la même matière, égaliser les sensibilités en diminuant la portée de la poutre courbe et voir ce que devient la fréquence.

Or, d'après les formules précédentes la sensibilité, dans les deux cas, est proportionnelle à a^4 ; il faut donc prendre :

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^4 = 4,45,$$

d'où :

$$a' = a \times 0,69$$

soit, pratiquement, les 7/10, c'est-à-dire que la poutre courbe de 7 mm de demi-portée a même sensibilité que la poutre rectiligne de 10 mm, mais les fréquences ont des carrés inversement proportionnels à a^4 , donc la poutre courbe de 7 mm a une fréquence qui est dans le rapport $\sqrt[2]{\frac{4,45}{5,15}} = 0,93$; donc, en définitive, on perd un peu en fréquence à sensibilité égale, mais on gagne beaucoup en portée, c'est-à-dire en diamètre d'encastrement.

Ces résultats sont-ils transposables pour les membranes ? Il est probable que le résultat final, seul, conserve quelque vraisemblance. Dans la *figure 13* on peut constater que les déplacements $r - r_0$, qui sont mesurés par l'aire projetée sur le plan frontal des z , sont faibles mais non négligeables et qu'ils ne peuvent pas être annulés, alors que dans une membrane ils sont pratiquement interdits, puisque les parallèles ne peuvent guère travailler à l'allongement; donc la déformation est très limitée près de l'encastrement. Il en est de même près du centre; donc la sensibilité est beaucoup plus réduite que pour la poutre, non seulement par l'intervention des moments fléchissants latéraux, mais par l'impossibilité de fléchir près des bords et du centre. Par contre, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique diminuent en même temps et l'on peut penser que la fréquence augmente, comme diminue la sensibilité, et que les nombres trouvés pour la poutre 4,45 et 5,15 restent encore voisins l'un de l'autre, mais sont notablement plus petits, de telle sorte que la membrane ondulée aura toujours une sensibilité plus grande que la membrane plane à même diamètre, mais qu'à même sensibilité, il y aura sensiblement même fréquence et que le rapport des diamètres $\frac{a'}{a}$ sera plus grand que le nombre 0,69 trouvé pour la poutre.

L'expérience vaudrait d'être tentée; si elle réussit en donnant, par exemple, un rapport de diamètre de 0,8, elle permettrait l'exécution de capsule manométrique de dimensions réduites et ayant d'autres qualités intéressantes.

En effet, la membrane ondulée travaillant surtout en flexion a une déformation qui reste proportionnelle à la pression plus longtemps que la membrane plane, où les allongements de méridiens interviennent assez vite, et plus longtemps encore que la membrane conique où les allongements de méridiens interviennent tout de suite. On pourrait donc faire travailler la membrane ondulée à plus grande sensibilité en *diminuant l'épaisseur* et, dans ce cas, on y trouverait avantage à tous les points de vue.

Il faut noter, d'ailleurs, que l'exemple numérique traité n'est probablement pas celui du meilleur profil : en effet, à l'encastrement et au centre, le profil a une tangente verticale, mais la courbure n'y est pas nulle et il est clair qu'un point de rebroussement réel au centre est très avantageux, comme il a été dit plus haut. A l'encastrement, un point de rebroussement doit aussi être avantageux : en effet, on sait que l'ordre infinitésimal de la distance d'un point d'une courbe à la tangente en un rebroussement voisin est d'ordre $\frac{3}{2}$, alors qu'il est 2 pour une courbe quelconque et 3 pour un point d'inflexion; donc le profil de la courbe s'éloigne plus vite de la tangente s'il y a rebroussement et les déplacements $r - r_0$ sont plus faibles; il y a donc moins de perte de travail en flexion. Le profil, probablement le meilleur, serait donc une sorte de cycloïde gauchie avec un maximum pour $s = \sigma \frac{\sqrt{3}}{3}$, mais la réalisation industrielle ne serait intéressante qu'en série, car elle nécessiterait la fabrication d'un outillage spécial.

MEMBRANES ENTRAINANT UN ÉQUIPAGE MOBILE

Toute la discussion précédente présente un intérêt théorique certain, mais il faut penser que la membrane ne vibre pas seule, comme dans le manographe photocathodique Labarthe, et qu'elle doit entraîner un équipage mobile qui augmente l'énergie cinétique mais laisse inchangée l'énergie potentielle, d'où une perte de fréquence qu'il est possible de chiffrer en supposant que la méridienne n'est pas déformée par cette charge en son centre.

En ramenant au centre de la membrane tout le mouvement de l'équipage mobile, c'est-à-dire de la tige de rappel et du miroir oscillant, on trouve que la masse efficace de la membrane plane, qui est le $1/5$ de la masse libre, doit être augmentée de toute la masse de la tige de rappel et de la masse efficace du miroir oscillant.

Celui-ci, pivotant autour d'un axe longitudinal passant sensiblement par le centre de gravité à une énergie cinétique $\frac{1}{2} I \omega^2$, où $I = \frac{2}{3} M l^2$, en appelant l la demi-largeur du miroir, et où $\omega = \frac{1}{d} \frac{dz_0}{dt}$, où z_0 est la cote du centre de la membrane et d le bras de levier de la rotation, c'est-à-dire la distance entre les fonds de rainures.

Dans le cas présent on a donc à augmenter la masse efficace de la membrane de la masse totale de la tige de rappel et de $\frac{2}{3} M \frac{l^2}{d^2}$, c'est-à-dire avec $l = 4$ et $d = 2$, $\frac{8}{3}$ de la masse du miroir oscillant, et avec les dimensions adoptées dans le manographe, c'est-à-dire un miroir de dimensions $14 \times 8 \times 1,5$, une tige de rappel 19×2 , une membrane de diamètre 16 et de 0,7 d'épaisseur, donc de masse efficace 28, on trouve une augmentation de masse efficace dans le rapport $\frac{400 + 60 + 28}{28} \approx 17$ dont la plus grosse part revient au miroir.

Cela donne, pour la fréquence, une diminution considérable dans le rapport $\sqrt{17} \approx 4,1$.

La membrane libre vibrant à $N = 0,47 \frac{0,07}{0,64} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{12}}{7,8 (1 - 0,25^2)}} = 27\,000$ par seconde environ, la membrane chargée vibre à 7 000 par seconde environ. On est évidemment très loin des 100 000 vibrations par seconde de la membrane

du manographe Labarthe qui a 10 mm de diamètre, 1 mm d'épaisseur et vibre librement, mais il ne faut pas exagérer l'importance de la fréquence.

En effet, considérons un moteur tournant à 70 tours par seconde, soit 4 200 tours/min : la membrane, vibrant à 7 000 par seconde, ne peut entrer en résonance qu'avec le centième harmonique de la pression p considérée comme fonction alternative de fréquence 70. Or, le centième harmonique a une amplitude qui peut être calculée par un développement en série de Fourier. En imaginant que la pression suit une loi sinusoïdale en dehors du temps de combustion, avec une amplitude p_0 — pression de compression — avant la combustion, et une amplitude P_0 — pression maximum — après la combustion, et que pendant la combustion entre l'angle d'allumage α et le point mort haut, les deux parties du diagramme sont raccordées par un arc en forme de sinusoïde, le calcul est assez simple et peut être terminé. On trouve que pour n assez grand, supérieur à 20 environ, une expression de l'amplitude totale est sensiblement $\frac{\pi \sqrt{2}}{2 n^3} \frac{P_0 - p_0}{\alpha^2}$, ce qui donne, pour $P_0 = 100 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, p_0 négligeable, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, une amplitude de 1 gramme; pour $\alpha = 0,1$, soit une combustion très brutale s'étendant sur 6° , on a $a_n = 25$ gr, négligeable, car un phénomène de résonance, basé sur une amplitude aussi petite, ne peut être sensible qu'après un temps très long.

Les hypothèses simplificatrices faites pour pouvoir achever le calcul peuvent être discutées, mais la seule discussion qui ait une portée est celle qui consiste à avoir supposé que la partie du diagramme correspondant à la combustion se raccorde aux autres parties, sans angle vif; en effet, dans ce cas, on se place dans des conditions favorables, puisque le développement en série de Fourier est alors en $\frac{1}{n^3}$, alors qu'il serait en $\frac{1}{n^2}$ au cas où le diagramme comporte des angles vifs.

La discussion est alors très délicate, car bien des auteurs pensent que la courbe compression se décroche de la courbe de combustion en un point précis, postérieur en général à l'allumage, et affirment l'existence d'un point anguleux.

Cette discussion sera reprise et il sera précisé qu'il n'y a de point anguleux réel que dans le cas de détonation complète, c'est-à-dire de détonation commençant dès l'allumage, ce qui ne se produit jamais, ou dans le cas du moteur à injection si, l'injection étant faite très tôt, le combustible est presque complètement vaporisé et réparti et où la combustion commence presque partout à la fois. En dehors de ces deux cas : allumage tardif dans un moteur à trop forte compression ou injection prématurée dans un moteur à injection, il sera démontré plus loin que le décrochement brusque de la courbe de compression et de la courbe de combustion n'est qu'une apparence graphique.

Toutefois, si l'on peut prendre une position précise pour le début de la combustion, il est difficile d'être aussi net pour la fin, car celle-ci est en général plus brusque; aussi, on peut s'attendre à ce que l'expérience ne confirme pas ce qui a été avancé plus haut et qu'une discussion plus serrée s'impose.

Il faut d'abord préciser que si une membrane peut vibrer, il n'est pas obligatoire qu'elle vibre : en effet, si l'on se reporte à l'équation générale des corps vibrants, on constate que l'état vibratoire est fonction de l'état initial et qu'une membrane ne peut vibrer beaucoup que progressivement et s'il est admissible que, pendant toute la compression, la membrane ne vibre pratiquement pas, elle ne peut guère le faire au moment de l'allumage, sauf dans les deux cas cités; mais à ce moment elle peut commencer à vibrer et même continuer à le faire pendant toute la combustion, ce qui ne peut guère se déceler sur un diagramme car l'arc de courbe est alors fortement vertical, mais en fin de combustion la résonance, jusqu'alors cachée, peut se découvrir et encore s'amplifier et faire apparaître ces bonds désordonnés du spot au sommet des diagrammes. Toutefois, il est très important de noter ici que ces vibrations peuvent avoir une tout autre origine, car la membrane, chargée de son équipement mobile, peut entrer en vibration et l'équipage mobile ne pas suivre à la même période si le ressort de rappel n'a pas été calculé de façon à avoir chargé, de l'équipage mobile, une fréquence propre de l'ordre de celle de la membrane. Les bonds désordonnés du spot n'ont pas d'autre origine car, si le ressort de rappel est bien calculé, les vibrations peuvent bien exister mais sont beaucoup plus régulières.

VIBRATIONS PARASITES EN PÉRIODE DE DÉTENTE

Expérimentalement on constate que les diagrammes comprennent des vibrations parasites qui paraissent dues aux vibrations propres de la membrane; elles ont pourtant une tout autre origine et montrent au contraire que la membrane, même chargée, suit très fidèlement les variations de pression et entre en résonance très rarement.

Dans le diagramme (fig. 16), l'étude des vibrations a pu être faite avec beaucoup de précision, parce que l'inscription du diagramme comprenait, en outre, l'inscription d'une vibration (512 par seconde). Il s'agissait d'un moteur lent, à gaz, et le manographe, de même type que celui décrit au début de cette étude, était beaucoup plus gros : la membrane avait 30 mm de diamètre et le miroir était beaucoup plus inerte et surtout il y avait, entre le moteur et la membrane, un tube de communication de 20,7 cm de long.

L'étude précise des vibrations (1) a montré que la fréquence n'est pas constante, mais qu'elle décroît régulièrement tout le long de la détente, ce qui ne peut être attribué à des vibrations d'origine mécanique. La cause de cette décroissance ne peut être décelée que si l'on admet que les vibrations correspondent à des oscillations réelles de pression dans le canal de communication qui se comporterait comme un tuyau sonore fermé à une extrémité. Le calcul est alors très convaincant, car le son fondamental est 401 vibrations et la décroissance peut être attribuée au refroidissement progressif du gaz contenu

(1) Voir FOUCHÉ, C.R., 29 mai 1933, page 1647.

dans le tube, refroidissement provenant de la détente et aussi du très grand rapport surface-volume que présente le gaz dans un tube très long. La loi de variations de la fréquence en fonction de la température est $N = 401 \sqrt{1 + \alpha t}$ et permet de déterminer la température du gaz contenu dans

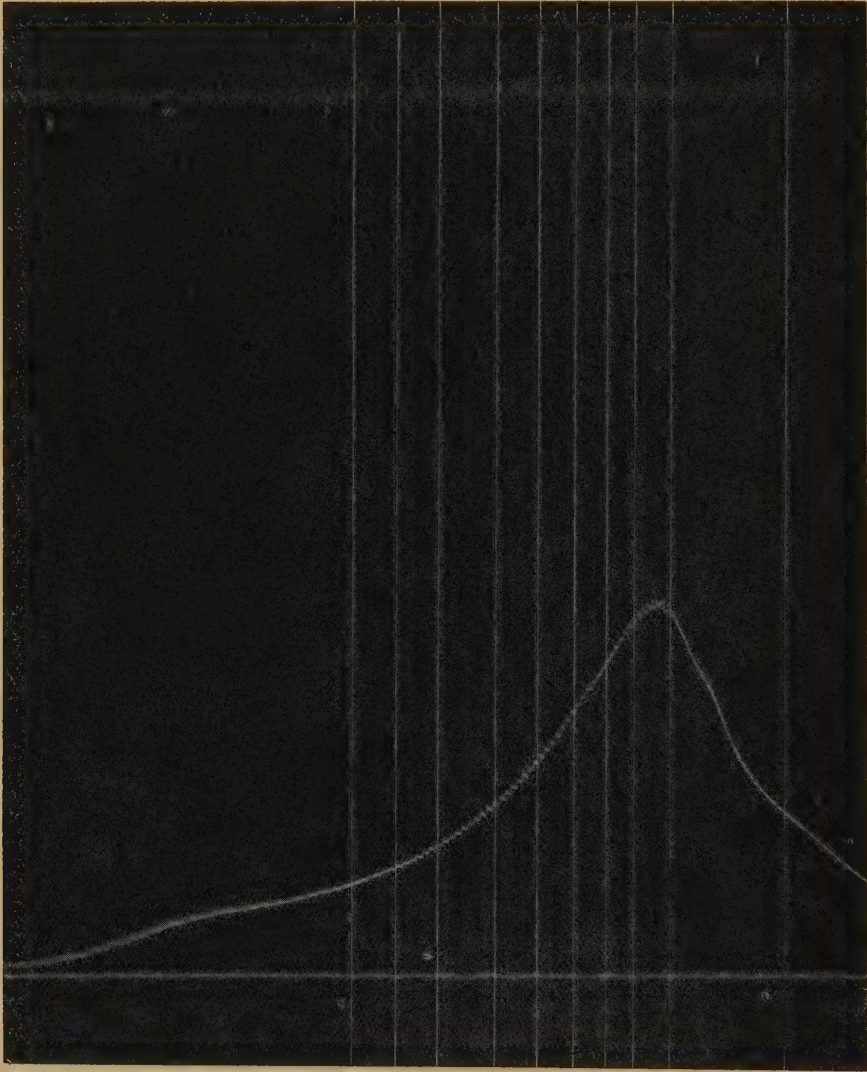


Fig. 16

le tube, puisque l'on peut mesurer la fréquence. On obtient ainsi le graphique (fig. 17).

La courbe I représente le refroidissement du gaz contenu dans le canal et défini, en y supposant la température uniforme par la décroissance de la fréquence des oscillations.

La courbe II représente un refroidissement relatif du gaz contenu dans le cylindre du moteur en calculant ses variations par la loi des gaz parfaits, à l'aide des pressions enregistrées et en prenant arbitrairement, pour origine, le

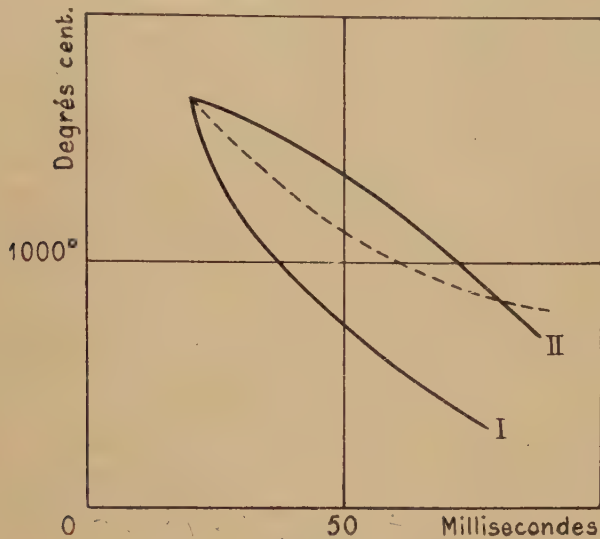


Fig. 17

point de départ de la courbe expérimentale I, à 15 millièmes de seconde après le point mort haut et 2 millièmes de seconde après le maximum de pression.

Comme élément de comparaison, une courbe en pointillé représente le refroidissement relatif correspondant, suivant l'évolution adiabatique. Le refroidissement plus rapide ainsi constaté dans le canal de communication s'explique par la valeur beaucoup plus élevée du rapport surface-volume.

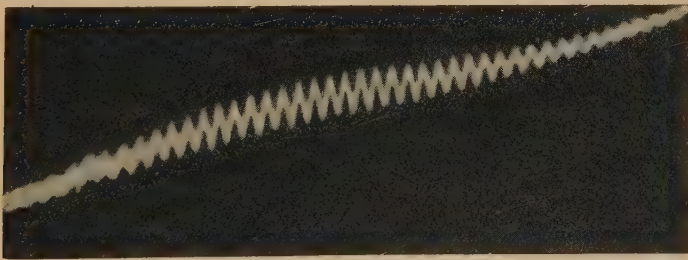


Fig. 18

Il n'y a donc, ici, aucun doute : les vibrations, constatées en détente, sont dues uniquement à des oscillations réelles de pressions. Un autre diagramme (*fig. 18*) montre un phénomène singulier : un fuseau de résonance vers la fin de la détente, qui est certainement dû à une vibration forcée de la membrane, puisqu'il y a oscillation de part et d'autre de la ligne moyenne, ce qui interdit de l'attribuer à une insuffisance du ressort de rappel.

Ce fuseau est amorcé avant l'ouverture de la soupape d'échappement et correspondrait à une résonance du fondamental du canal de communication sur le son fondamental du cylindre du moteur fonctionnant comme tuyau sonore fermé aux deux extrémités. Cette résonance s'épanouit et se résorbe lentement, ce qui s'explique par le fait que le son fondamental du cylindre et celui du tube deviennent simultanément plus graves, mais avec des vitesses différentes.

Enfin, une expérience cruciale a été tentée, à la suite de ces premiers essais : la capsule manométrique fut mise en contact direct avec les gaz du cylindre, sans aucun étranglement, à l'aide d'un autre boîtier qui prenait place du robinet de montage du manographe de Watt qui servait ordinairement à l'étude de ce moteur et aucune vibration n'a plus été enregistrée, sauf de très légères vers la fin de la montée en pression.

La membrane, qui avait une vibration propre de 2 000 environ, était donc capable de suivre des variations réelles de pression de 600 par seconde ; donc la membrane n'entrait pas en résonance, même sur le troisième harmonique de ces vibrations, il est vrai quasi sinusoïdales, et ceci montre que l'amortissement devait jouer un rôle considérable.

AMORTISSEMENT

L'origine de l'amortissement est uniquement due à la déperdition d'énergie dans l'encastrement de la membrane, donc on ne peut guère en chiffrer l'importance, mais comme il n'y a aucun frottement dans les pièces mobiles, il est impossible d'admettre d'autre hypothèse. L'expérience montre d'ailleurs, en amorçant des vibrations par une percussion sur la membrane, qu'il y a tout au plus trois vibrations doubles, la dernière à peine perceptible.

La théorie, exposée précédemment, de la fréquence propre de la membrane, est basée sur l'hypothèse que la méridienne garde une configuration constante et que toutes les ordonnées sont proportionnelles à la pression mais, en réalité, le phénomène est plus complexe, car la formule de la méridienne est établie statiquement et il est évident que les équations correspondantes des tensions et des moments fléchissants seraient toutes altérées par les inerties si l'on établissait les équations en vibrations. Ce calcul a été fait par Lord KELVIN et l'on a vu plus haut qu'il ne modifiait le fondamental de la membrane qu'en remplaçant le nombre 2,98 par le nombre 2,95, mais il fait apparaître des partiels, c'est-à-dire des harmoniques qui ne sont pas multiples du fondamental, et ces partiels, dont le calcul nécessite l'introduction des fonctions de Bessel, constituent des vibrations transversales et longitudinales de la membrane, non dans son ensemble, mais à l'intérieur de sa masse. L'encastrement est donc soumis à des efforts perpendiculaires au plan de la membrane et à des efforts dans le plan de la membrane, et ces efforts soumettent l'encastrement à un régime vibratoire en lui communiquant de l'énergie, aussi bien potentielle que cinétique, et il y a amortissement sans que la période en soit nécessairement affectée dans de grandes proportions. L'encastrement étant

relativement beaucoup plus important que pour une tige vibrante encastrée qui, pourtant, s'amortit assez vite, on conçoit que, pour une membrane, l'amortissement soit beaucoup plus rapide; toutefois, il est probable qu'une membrane ondulée, du type étudié plus haut, s'amortisse nettement moins vite, puisque les allongements n'entrent presque pas en jeu et qu'ils ne font pas travailler l'encastrement dans le plan de la membrane.

AUTRES VIBRATIONS

Certains auteurs ont signalé des vibrations de diagrammes n'obéissant pas aux mêmes lois que celles qui viennent d'être étudiées, mais elles n'apparaissent pas en détente et elles ne sont pas de même nature. LAURE ⁽¹⁾, en particulier, signale des vibrations en période de combustions et qui ont une fréquence indépendante de la longueur du tube de communication, puisqu'il fait varier celle-ci dans des rapports non simples et que la période sur le diagramme ne change pas. Il établit, par contre, que la fréquence dépend de la nature du combustible; il s'agit donc de vibrations forcées de la membrane, correspondantes à des oscillations réelles de pression dans le cylindre moteur lui-même. Une étude détaillée de ces vibrations serait intéressante car elle renseignerait sans doute sur l'état du gaz à ce moment, dans le moteur même, en donnant une relation entre la température et le débit d'énergie que constitue la combustion.

DUCHÈNE ⁽²⁾, à propos de photos de flamme, dans un moteur à chambre de combustion cylindrique, a de même observé des stries correspondant à des oscillations de la masse des gaz, suivant la loi des ondes stationnaires et un calcul de température, basé sur l'idée de considérer le cylindre que constituait la chambre de combustion comme un tuyau sonore fermé aux deux extrémités, a donné des résultats tout à fait vraisemblables.

LABARTHE, à propos de vibrations en période de combustion, présentant des battements sur la fréquence propre d'un canal de communication moteur-membrane, a présenté des conclusions analogues.

Il est donc hors de doute que ces vibrations, pendant la période de combustion, ont trait à la nature même de la combustion et correspondent à des oscillations réelles de la pression et que la période propre de la membrane, même chargée, ne peut interférer avec ces oscillations et que si des vibrations désordonnées se manifestent au point de pression maximum, elles doivent être attribuées uniquement à une insuffisance du ressort de rappel du miroir oscillant. Cependant, deux auteurs signalent l'existence de vibrations d'amplitude très importante, s'amorçant aux environs du point de pression maximum, et l'un d'eux, SERRUYS, en tire argument pour affirmer l'existence d'un régime détonant lorsque ces vibrations apparaissent sur ses diagrammes. Il est plus

(1) LAURE, *Publications scientifiques du Ministère de l'Air*, n° 78.

(2) DUCHÈNE, *Publications scientifiques du Ministère de l'Air*, n° 11.

exact d'attribuer ces vibrations excessives à la forme du volume de la canalisation entre les gaz du cylindre et la membrane car, dans les deux manographes précités, la canalisation comporte un étranglement très proche du centre de la membrane, ce qui peut produire des vibrations suivant le premier partiel sans qu'il y ait détonation.

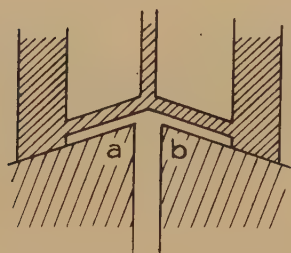


Fig. 19

En effet, une membrane, chargée en son centre, fléchit davantage au centre que si la même charge totale est répartie sur toute la surface et les flancs de la membrane, surtout de la membrane conique de Serruys, se gonflent moins. Le jet gazeux provenant d'une forte valeur de $\frac{dp}{dt}$ est concentré au centre et ne se répartit sur toute la surface qu'après avoir franchi l'étranglement annulaire *ab* (fig. 19) et il y a donc non seulement une perte de charge, dont le calcul n'aurait de sens qu'au cas du régime permanent, mais un tourbillonnement non mesurable. Ensuite, en fin de montée en pression, le jet gazeux est moins fort, l'étranglement annulaire *ab* est moins sensible, puisque la membrane a fléchi, et la pression se répartit mieux sur toute la surface de la membrane dont les flancs se gonflent davantage et qui fléchit globalement, de façon plus accentuée, puisque la charge totale est plus grande, d'où l'amorce d'une vibration transversale sur le premier partiel.

LAURE signale un phénomène du même genre : le manographe employé, à membrane plane, comprend un espace sous cette membrane ayant un étranglement annulaire de même nature que dans le manographe Serruys. Dans ses premiers essais la hauteur de cet espace était plus forte, mais le diagramme présentait un crochet vers la seconde moitié de la montée en pression, lequel crochet semblait indiquer une montée en pression très rapide, montant même très au delà de la pression finale, suivie d'une chute de pression très rapide et ensuite il y avait reprise d'un diagramme vraisemblable. Cela tenait, sans aucun doute, à ce que la membrane chargée en son centre fléchit davantage que si elle est chargée uniformément, la charge totale restant la même. Ensuite, en vue de supprimer ce crochet, LAURE a réduit la hauteur de l'espace sous membrane jusqu'à 0,3 mm : le crochet a bien disparu mais des vibrations sont apparues au point de pression maximum.

Il reste que la réduction excessive de l'espace sous membrane fait de ces manographes de véritables instruments de musique, puisqu'un fort gradient de pression suffit à faire vibrer la membrane sur son premier partiel et que ces vibrations ne prouvent pas la détonation.

TROISIÈME PARTIE

CHAPITRE VI

CIRCULATION DE L'ÉNERGIE DANS LES GAZ, PAR CONDUCTION ET PAR TRANSFERT SONIQUE

GÉNÉRALITÉS

Un apport de chaleur dQ , dans un élément de volume v d'un gaz indéfini, y provoque aussitôt une élévation locale de la température et un accroissement de volume, qui se réalise par un travail qui se disperse par transfert sonique dans les gaz restants. La vitesse de propagation des ébranlements étant beaucoup plus grande que la conduction, qui diffusera ultérieurement l'accroissement d'énergie interne de l'élément chauffé, on peut admettre que la pression est restée sensiblement constante et qu'ainsi la proportion du travail perdu dans les gaz indéfinis à l'énergie totale dQ est $\frac{c-c}{c} = \frac{\gamma-1}{\gamma}$.

Si, maintenant, on considère un gaz contenu dans un volume fini V et y ayant la pression p et la température uniforme T , un apport de chaleur dQ , dans une partie v du volume V y provoque un accroissement de température et un accroissement de volume dv qui se réalise aux dépens du volume $V - v$ des gaz restants. La proportion du travail dispersé par transfert sonique à l'énergie totale dQ n'est plus $\frac{\gamma-1}{\gamma}$ et doit être déterminée, par le calcul du travail reçu par les gaz froids, passant adiabatiquement du volume $V - v$ au volume $V - v - dv$.

Le travail est donné par la formule classique :

$$d\tau = p \frac{V-v}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V-v}{V-v-dv} \right)^{\gamma-1} \right].$$

L'énergie dQ peut se calculer en fonction du seul accroissement dv en imaginant que l'élément de volume v a d'abord reçu dQ à volume constant, puis s'est détendu adiabatiquement de v à $v + dv$. On trouve ainsi :

$$dQ = c \cdot \frac{pv}{R} \left\{ \left[\frac{(V-v)(V+dv)}{(V-v-dv) \cdot v} \right]^{\gamma} - 1 \right\}.$$

Le rapport $\frac{d\tau}{dQ}$ est donc très complexe, mais il est intéressant de le développer par rapport à dv , et l'on trouve :

$$\frac{d\tau}{dQ} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{V - v}{V},$$

en négligeant les infiniment petits en dv .

Cette expression montre que si $\frac{v}{V}$ est petit on peut pratiquement dire que la proportion de la partie de dQ qui est transférée soniquement aux gaz froids, à la valeur totale de dQ , est très voisine de $\frac{\gamma - 1}{\gamma}$.

Comme γ varie de 1,4 à 1,25, en négligeant les gaz monoatomiques, ce rapport $\frac{\gamma - 1}{\gamma}$ est environ un quart et l'on pourra dire en première approximation que, lorsqu'une quantité de chaleur est fournie (ou prise) à un petit élément de volume d'un gaz, les trois quarts de cette quantité de chaleur restent (ou sont pris) sur place et que le quart restant est dispersé (ou absorbé) soniquement dans l'ensemble du gaz. Ce sera le cas des combustions par front de flamme, de peu d'épaisseur, et des pertes par les parois.

L'énergie sonique se disperse, dans l'ensemble du gaz, proportionnellement à la masse ou au volume, lorsque la température est uniforme. Mais, dans le cas où la température n'est pas uniforme, l'énergie sonique se répartit proportionnellement aux volumes et non aux masses. En effet, le travail mis en jeu, dans une transformation adiabatique, peut s'écrire :

$$\frac{p \cdot V}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p'}{p} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Dans les différentes parties du gaz les pressions initiale p et finale p' sont les mêmes, donc il reste V comme seul facteur particulier et le travail total $\frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot dQ$ est distribué soniquement, proportionnellement aux volumes. Ainsi, dans une partie des gaz, où la température serait T , le volume spécifique σ , le travail reçu par unité de volume sera $\frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{dQ}{V}$ et par unité de masse $\frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot dQ \cdot \frac{\sigma}{V}$.

Le rapport $\frac{\sigma}{V}$ peut être transformé en fonction des températures, car $\frac{\sigma}{V} = \frac{p \sigma}{pV} = \frac{RT}{MRT_m} = \frac{T}{M \cdot T_m}$, où T_m est la température moyenne définie par $pV = MRT_m$, donc la température des gaz si une température d'équilibre pouvait s'établir par une conduction instantanée.

Ainsi, la quantité de travail reçue par l'unité de masse du gaz de température T et de volume spécifique σ est donnée par l'une ou l'autre des formules :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot dQ \cdot \frac{\sigma}{V} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot dQ \cdot \frac{T}{M \cdot T_m}.$$

PROPAGATION DE L'ÉNERGIE PAR CONDUCTION

Pour se rendre compte de la différence des modes de propagation de la conduction et des ondes soniques, on peut, en première approximation, négliger les transformations réciproques de l'énergie interne et de l'énergie sonique pendant le petit intervalle de temps, immédiatement postérieur au moment où l'apport initial de chaleur s'est fractionné.

La diffusion de l'énergie interne par conduction est alors définie par une équation aux dérivées partielles, dans laquelle on doit tenir compte de la forme des surfaces isothermes.

I. — Surfaces isothermes planes.

En désignant par P la quantité de chaleur qui traverse, par conduction, l'unité de surface pendant l'unité de temps et par cT la densité massique de l'énergie interne, on peut écrire une équation de continuité et une équation de tension :

L'équation de continuité s'obtient en considérant deux sections planes d'abscisse x et $x + dx$, de surface unité, limitant une tranche d'épaisseur dx . Par la section d'abscisse x , il entre la quantité de chaleur $P \, dt$ pendant le temps dt , et par la section d'abscisse $x + dx$, la quantité de chaleur $\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx\right) dt$ sort pendant le même temps dt . Il reste donc, au bénéfice de la tranche, la quantité de chaleur $-\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx \cdot dt$, qui augmente l'énergie interne de la quantité de chaleur $\rho \, dx \times \frac{\partial cT}{\partial t} \cdot dt$. En égalant ces deux expressions et simplifiant par $dx \cdot dt$, il vient :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \frac{\partial cT}{\partial t}.$$

L'équation de tension traduit simplement le fait que la quantité de chaleur P , qui traverse la surface unité pendant l'unité de temps, est proportionnelle au gradient de température, ou plus exactement au gradient de l'énergie interne, d'où :

$$-P = k \frac{\partial cT}{\partial x}.$$

En éliminant P entre ces deux équations, il vient :

$$k \cdot \frac{\partial^2 cT}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial cT}{\partial t},$$

équation classique de la chaleur et qui est du type parabolique, alors que l'équation aux dérivées partielles, qui définit le transfert sonique, est du type hyperbolique.

Les principales intégrales connues de l'équation de la chaleur sont de trois types :

$$1^{\circ} \quad T = A + e^{\frac{k}{c} \cdot \alpha^2 \cdot t} \times [B_1 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}],$$

où le paramètre α est réel ou imaginaire, auquel cas l'exposant de l'exponentielle contenant le temps est négatif et les exponentielles, contenant l'abscisse x , se transforment en sinus et en cosinus.

2^o Des polynômes comme, par exemple :

$$T = \frac{\alpha}{2k} x^2 + ax + \frac{\alpha}{c} t + b.$$

Ces deux types de solutions sont des fonctions continues en tous points, d'abscisse x , et pour tout instant t .

L'équation aux dérivées partielles étant linéaire, toutes combinaisons linéaires de solutions sont aussi solutions, en particulier les dérivées partielles des solutions par rapport aux constantes, et surtout au paramètre α , sont aussi solutions. De plus, on peut vérifier que la fonction $P = -k \frac{\partial cT}{\partial x}$ est aussi solution de la même équation de la chaleur; donc si T est solution, $\frac{\partial T}{\partial x}$ et, de façon générale, les dérivées partielles successives de T , par rapport à x , sont solutions.

Réciproquement, les primitives de T par rapport à x , et dont la constante d'intégration est indépendante des temps, sont aussi solutions.

3^o Des fonctions ayant une discontinuité et déduites d'un théorème d'analyse, suivant lequel, si une fonction $u(x, y)$ est solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$, la fonction :

$$V(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4y}} \cdot u\left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$$

est aussi solution.

Ainsi, on trouve, pour l'équation $k \cdot \frac{\partial^2 cT}{\partial x^2} = c \frac{\partial cT}{\partial t}$, qui admet la solution évidente $cT = a$, la nouvelle solution :

$$cT = cT_0 + \frac{a}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{cx^2}{4kt}}.$$

Cette solution est particulièrement intéressante car elle représente le transfert d'énergie interne par conduction dans un milieu à température initiale uniforme T_0 , où une quantité de chaleur, non infiniment petite, apparaît brusquement dans un plan.

La primitive de cette fonction, par rapport à x , est aussi très intéressante car elle donne l'évolution et la répartition des températures dans un gaz, initialement à la température T_0 , mis en contact avec un plan maintenu à la température T_1 . On a exactement :

$$T = T_1 + (T_0 - T_1) \frac{2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\Pi}} \int_0^x e^{-\frac{\rho x^2}{4kt}} \times \frac{dx}{\sqrt{4kt}}.$$

II. — Surfaces isothermes cylindriques et sphériques.

L'équation de tension reste la même, mais l'équation de continuité change profondément, car on ne peut plus considérer de sections ayant pour surface l'unité.

Ainsi, pour le cas des surfaces isothermes sphériques, on devra écrire :

$$4 \Pi x^2 \cdot P dt - 4 \Pi (x + dx)^2 \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dt = \rho \cdot 4 \Pi x^2 dx \cdot \frac{\partial cT}{\partial t} dt,$$

d'où, après simplification :

$$-\left(\frac{2}{x} P + \frac{\partial P}{\partial x}\right) = \rho \frac{\partial cT}{\partial t}.$$

Pour les surfaces isothermes cylindriques, on trouverait :

$$-\left(\frac{1}{x} P + \frac{\partial P}{\partial x}\right) = \rho \frac{\partial cT}{\partial t}.$$

En éliminant P entre ces équations de continuité et l'équation de tension inchangée, on trouve que la température vérifie, pour les surfaces isothermes sphériques, l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{2}{x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

et, pour les surfaces isothermes cylindriques, une équation analogue où le coefficient 2 est remplacé par 1.

Les solutions de ces équations peuvent être recherchées de la même façon que celles de l'équation classique de la chaleur. On constate que les solutions du premier type ne conviennent plus à cause du facteur en $\frac{1}{x}$. Les solutions polynômes peuvent encore être découvertes par identification. La première solution du troisième type existe encore, mais l'exposant de la puissance de t , qui figure au dénominateur, est doublé pour les surfaces isothermes cylindriques et triplé pour les surfaces isothermes sphériques.

Ainsi, dans le cas de l'apport local et brusque d'une quantité de chaleur, dans un gaz à température initial T_0 , la température T est donnée par les formules :

$$T = T_0 + \frac{a}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{\rho x^2}{4kt}},$$

$$T = T_0 + \frac{a}{t} \times e^{-\frac{\rho x^2}{4kt}},$$

$$T = T_0 + \frac{a}{t\sqrt{t}} \times e^{-\frac{\rho x^2}{4kt}},$$

suivant que la discontinuité de température a lieu dans un plan, sur une ligne ou en un point. Une figuration de la surface $T(x, t)$ en perspective cavalière

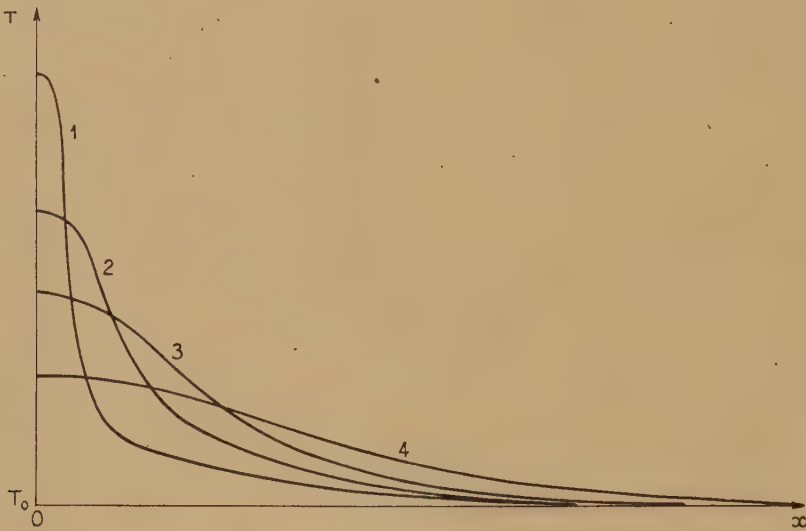


Fig. 20

étant peu nette à cause de la singularité à l'origine, on a représenté, *figure 20*, l'évolution des températures par un réseau de courbes correspondant chacune à des instants successifs.

Les courbes 1, 2, 3, 4 représentent, à des temps croissants, la distribution des températures dans le gaz. La courbe 0, réduite à l'axe des T et à la droite $T = T_0$, prise comme axe des x , représente la distribution de température à l'instant initial. Le maximum d'une courbe pour valeur $T_0 + \frac{a}{\sqrt{t}}$ ou $T_0 + \frac{a}{t}$ ou $T_0 + \frac{a}{t\sqrt{t}}$, suivant la forme des surfaces isothermes : plane, cylindrique ou sphérique, et ces formules précisent les rapidités relatives de refroidissement.

REMARQUE. — VERNOTTE et MURAOUR et AUNIS ⁽¹⁾, dans l'étude de « l'Echauffement d'une paroi par une flamme brève », arrivent expérimentalement à des formules analogues, VERNOTTE trouvant un exposant $-\frac{1}{2}$ et MURAOUR et AUNIS un exposant voisin de -1 . L'accord des expérimentateurs peut se faire aisément en précisant si la discontinuité de température a lieu sur une surface de faible courbure ou le long d'une ligne.

CIRCULATION DE L'ÉNERGIE EN CAS DE RÉACTION CHIMIQUE

La circulation de l'énergie dans un milieu gazeux, où il se produit une réaction chimique, peut être étudiée de la même façon, mais la solution mathématique revêt une complexité beaucoup plus grande, surtout si l'on cherche à atteindre la puissance totale, thermique et sonique, et en se plaçant dans le cas général d'une réaction chimique non instantanée.

1^o Résultats de JOUGUET.

JOUGUET ⁽²⁾ a pu, cependant, traiter entièrement le cas d'une flamme stationnaire dans un courant gazeux et arrive, par l'application des principes du régime permanent, à une première intégration qui le conduit à l'équation différentielle :

$$k \frac{dT}{dx} + ml\alpha = mC(T - T_0),$$

où k est le coefficient classique de conductibilité et non le coefficient utilisé dans les calculs précédents où le coefficient classique a été remplacé par kc , m la masse de gaz qui brûle par unité de temps dans la section de surface unité, l la chaleur émise par la réaction complète de la masse unité, α un paramètre qui mesure l'état de la réaction et qui varie de 0 à 1, C la chaleur spécifique à pression constante et où x est l'abscisse par rapport au front stationnaire de la flamme, donc par rapport à une origine fixe par rapport au tube où circule le gaz.

L'évolution de la réaction chimique, supposée monomoléculaire, est donnée dans le temps par $\frac{d\alpha}{dt} = AT(1 - \alpha)$.

Dans le cours des calculs, JOUGUET désigne par u la vitesse d'une tranche de gaz par rapport au tube, de telle sorte qu'il peut écrire :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{dx}{dt} = u \cdot \frac{d\alpha}{dx}$$

(1) *Journée de la Combustion à volume constant.*

(2) JOUGUET, *Mécanique des explosifs et Journée de la Combustion à volume constant, Chaleur et Industrie*, janvier 1939.

et comme, par ailleurs, l'équation de continuité en masse $\frac{u}{\sigma} = \frac{u_0}{\sigma_0} = m$, où σ est le volume spécifique, donne $u = m\sigma = m \frac{nRT}{p}$, où nR est la constante des gaz parfaits et p la pression, il peut intégrer α en fonction de x et arrive ainsi aux résultats suivants :

$$\alpha = 1 - e^{-\frac{Ap}{mnR}x},$$

$$T = T_0 + \frac{l}{C} - \frac{l}{C} \frac{m^2 nRC}{Apk + m^2 nRC} e^{-\frac{Ap}{mnR}x} + Be^{\frac{mC}{k}x}.$$

Dans les gaz brûlés, où x est positif, la constante d'intégration B est nulle, sinon T pourrait devenir infini et il ne reste que la première exponentielle, qui n'est autre, à un facteur constant près, que celle qui figure dans l'expression de α et qui représente l'évolution de la réaction.

Dans les gaz frais, où x est négatif, il faut annuler tous les termes en l et la constante d'intégration B n'est plus nulle.

Ensuite, JOUGUET admet qu'il existe une température τ dans le front de flamme; on en peut aussitôt tirer la température dans les gaz brûlés :

$$T = \theta - (\theta - \tau) e^{-\frac{Ap}{mnR}x} \quad \text{en posant} \quad \theta = T_0 + \frac{l}{C}.$$

température des gaz brûlés détendus à la pression initiale, et dans les gaz frais :

$$T = T_0 + (\tau - T_0) e^{\frac{mC}{k}x}.$$

Cette hypothèse impose aussi :

$$m = \sqrt{\frac{Apk}{nRC} \cdot \frac{\theta - \tau}{\tau - T_0}},$$

d'où il tire enfin :

$$u_0 = m\sigma_0 = m \frac{nRT_0}{p} = \frac{T_0}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{nRkA}{C}} \cdot \sqrt{\frac{\theta - \tau}{\tau - T_0}},$$

vitesse initiale de circulation du gaz dans le tube et vitesse relative du front de flamme par rapport au gaz frais.

La vitesse u des tranches gazeuses est donnée par $u = m\sigma = m \frac{nRT}{p}$, et est donc croissante avec la température, et sa variation peut être représentée par les mêmes courbes, ces courbes formant une courbe continue ayant à l'origine un point d'inflexion apparent, car d'après l'équation différentielle initiale, T étant le même et α nul à l'origine, $\frac{dT}{dx}$ ne change pas de valeur.

L'ensemble est entièrement compris entre les deux asymptotes $T = T_0$ pour les gaz frais, $T = \theta = T_0 + \frac{l}{C}$ pour les gaz brûlés (fig. 21).

Le phénomène paraît très clairement représenté : les tranches gazeuses ont un mouvement vers et au delà le front de flamme, qui se superpose au courant gazeux initial, et l'on reconnaît le transfert d'énergie thermique et sonique, ce dernier étant le travail des gaz brûlés qui se détendent à la pression initiale.

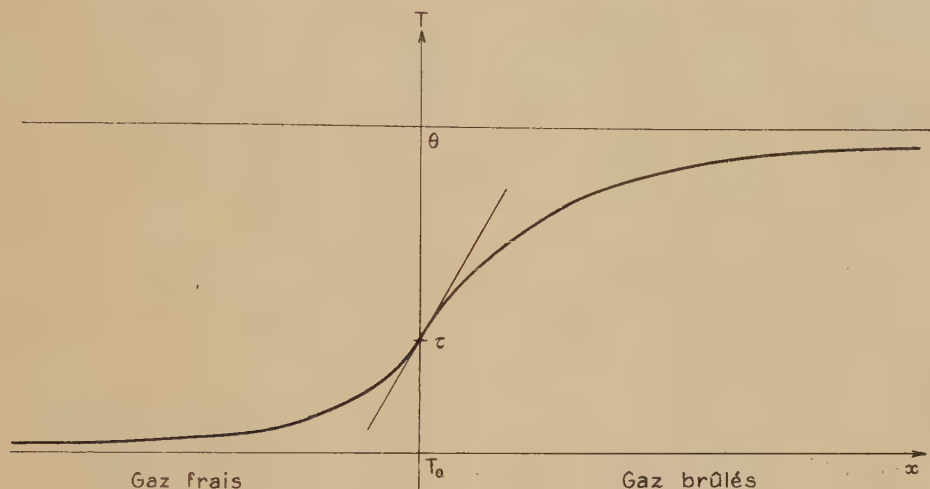


Fig. 21

On peut d'ailleurs écrire l'équation initiale de Jouguet en deux parties :

$$\frac{1}{\gamma} k \frac{dT}{dx} + \frac{1}{\gamma} ml \alpha = mc (T - T_0),$$

pour l'énergie thermique pure;

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} k \frac{dT}{dx} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} ml \alpha = m (C - c) (T - T_0) = m \cdot nR (T - T_0) = mp (\sigma - \sigma_0),$$

pour l'énergie sonique.

2° Généralisation.

Il semble possible de généraliser les résultats de JOUGUET au cas d'une flamme se propageant au sein d'un milieu gazeux fixe initialement, en séparant précisément les influences de la conduction thermique pure et du transfert d'énergie sonique à grande vitesse, en admettant simplement que la pression reste uniforme, mais non nécessairement constante.

La séparation de l'équation de Jouguet en deux parties, l'une relative à la conduction de l'énergie thermique pure, l'autre au travail des gaz brûlés, a été faite sur l'équation initiale elle-même. Il est facile de voir, si l'on suppose la réaction rapide, mais non instantanée, et le gradient de température élevé, mais non infini, dans le front de flamme, et la pression uniforme, mais non nécessairement constante, que l'équation de Jouguet, relative à la conduction thermique pure, peut s'écrire directement, même dans le cas d'une propagation par ondes sphériques à la suite d'un allumage ponctuel. Au lieu d'invoquer les principes du régime permanent, il suffit de faire des intégrations graphiques puisque la courbe de température du front de flamme se déplace, par translation, sous l'action de l'énergie thermique pure, car celle-ci est entièrement absorbée sur place par l'échauffement et l'activation des molécules fraîches qui vont brûler.

On peut dire, en outre, que le fait d'avoir supposé $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{dT}{dx}$ de valeur élevée, mais non infinie, indique que l'essentiel de la conduction se passe dans le front de flamme et son voisinage immédiat, et que le calcul de l'énergie transmise par conduction est seulement fonction de la surface du front de flamme, et qu'on pourra raisonner par unité de surface.

Le rôle de l'énergie sonique est tout différent et si, dans un milieu indéfini, l'énergie sonique peut se perdre au loin, il n'en est pas de même dans un milieu fermé, où l'énergie sonique constitue un flux régulier à grande vitesse, qui se réfléchit sur les parois et interfère sur lui-même et, sauf le cas passager d'ondes stationnaires, se disperse en énergie cinétique moléculaire, donc en température et pression.

Ainsi, la température T_0 de l'équation de Jouguet serait croissante et, pendant le temps dt , où la masse m de gaz a brûlé, on peut même écrire que l'accroissement de température serait donné par l'égalité :

$$M \cdot c \cdot \Delta T = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot m dt \cdot l,$$

où M serait la masse totale de gaz, gaz inertes compris.

Cependant, il faut faire une réserve au sujet de la température du front de flamme, dont JOUGUET a admis l'existence. Quand on dit qu'un gaz a une température T , on suppose qu'il est en équilibre thermique, c'est-à-dire que les vitesses de ses molécules sont distribuées suivant la loi classique de dispersion, mais il n'en est pas ainsi dans un front de flamme qui est, en réalité, un mélange de molécules à énergie cinétique réparties suivant plusieurs courbes de dispersion, et il est possible que la conduction thermique obéisse à la loi trouvée précédemment et qui est relative au transfert d'énergie thermique au voisinage d'une discontinuité de température. Ceci expliquerait pourquoi la formule de Jouguet n'a pas reçu la sanction de l'expérience, du moins dans les valeurs numériques précises qu'elle donne toujours trop fortes.

L'explication que donne JOUGUET de l'apparition de la détonation, en adoptant le point de vue de SERRUYS, sauf qu'il précise que la détonation ne se

produit pas nécessairement à la fin de la montée en pression, appelle la même réserve : la température du front de flamme n'est pas la température spontanée d'inflammation et il est probable qu'elle est plus élevée.

En tenant compte de ce qui a été dit plus haut, relativement à la très grande rapidité de dispersion de l'énergie thermique au voisinage d'une discontinuité, il est nécessaire d'appeler température spontanée d'inflammation la température, équilibrée, que doit atteindre un gaz pour que la combustion, s'y amorçant entre quelques molécules, au hasard des irrégularités de vitesses moléculaires, puisse continuer.

Une discussion plus détaillée serait imprudente et il vaut mieux faire appel à l'expérience. Celle-ci pourra donner des renseignements grâce à la remarque faite sur la valeur de l'élévation progressive de la température des gaz frais, dont la cause réside dans l'apport d'énergie sonique, si l'on peut négliger l'énergie émise par les radiations lumineuses.

INTERPRÉTATION DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX RELATIFS A LA COMBUSTION EN MILIEU HOMOGÈNE, AVEC ALLUMAGE PROVOQUÉ

GÉNÉRALITÉS

Dans les études modernes sur la combustion en milieu homogène, l'accord s'est fait à peu près unanimement sur les hypothèses à admettre. En particulier, RIBAUD ⁽¹⁾ les résume sensiblement ainsi :

1° Les gaz brûlés travaillent complètement, c'est-à-dire qu'ils sont pratiquement ramenés, à chaque instant, à la pression ambiante;

2° La température dans les gaz frais est uniforme;

3° Les chaleurs spécifiques dans les gaz frais sont indépendantes de la température et de la pression.

Dans ce qui va suivre, on emploiera les notations de Jouguet, sauf qu'on remplacera nR par R , c'est-à-dire qu'on supposera qu'il n'y a pas de variation du nombre total de molécules : R sera alors la constante des gaz parfaits relative à l'unité de masse. De même, les quantités de chaleur seront exprimées en unité correspondante d'énergie.

La conséquence immédiate de la deuxième hypothèse est que la conduction thermique pure ne joue pas au delà d'une très faible distance de toute zone de discontinuité de température, en particulier d'un front de flamme et des parois, et que l'évolution des gaz frais est adiabatique si l'on néglige l'émission d'énergie de radiations. L'énergie reçue par les gaz frais, uniquement par transfert sonique, est donc un travail qui se traduit par une diminution $d\sigma$ du volume spécifique.

Si l'on désigne toujours par m la masse de gaz qui brûle par unité de temps et par unité de surface du front de flamme, par l la chaleur dégagée par unité de masse dans la réaction complète, l'énergie sonique émise par la réaction pendant le temps dt est $\frac{\gamma-1}{\gamma} mSl dt$ où S est la surface du front de flamme et cette énergie sonique est répartie uniformément en un temps petit par rapport à dt , dans le volume total V des gaz. Donc, pendant le temps dt , la

(1) Journée de la Combustion à volume constant, Chaleur et Industrie, janvier 1939.

masse unité des gaz frais recevra l'énergie $\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\sigma}{V} \cdot mSl dt$ et, en tenant compte de $p\sigma = RT$ et de $p\sigma^\gamma = \text{const}$, il vient, pour une combustion à volume constant :

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{\sigma}{V} \cdot mSl dt = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot \frac{T}{MT_m} \cdot mSl dt = -p d\sigma = c dT = \frac{\sigma}{\gamma} dp = \frac{RT}{p\gamma} dp,$$

où σ , T , c , γ et R sont relatifs aux seuls gaz frais et où la pression p est la pression supposée uniforme dans toute la masse des gaz frais et brûlés, et T_m donné par $p \cdot V = MRT_m$.

Pour tenir compte des pertes de chaleur par les parois il faudrait, en outre, tenir compte d'un terme qui viendrait en diminution de mSl et si, dans un diagramme pratique, on mesure $\frac{dp}{dt}$, on obtiendra, en réalité, mSl diminué de la vitesse de variation de la perte de chaleur par les parois. Sauf indication expresse, il n'en sera pas tenu compte dans les calculs suivants.

Dans le cas de la combustion à volume variable, c'est-à-dire en particulier pour un moteur, l'énergie apportée aux gaz frais est augmentée de l'énergie due à la compression $-p dV$, répartie uniformément et intégralement dans tout le volume de la masse gazeuse, soit $-\frac{p dV}{V}$ par unité de volume et $-p\sigma \frac{dV}{V}$ par unité de masse des gaz frais, soit encore $-RT \frac{dV}{V}$, où T est toujours la température des seuls gaz frais et V le volume de toute la masse gazeuse.

L'évolution adiabatique des gaz frais, pour une combustion à volume variable, est donc donnée par l'équation multiple à six membres :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\sigma}{V} mSl dt - p\sigma \frac{dV}{V} &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{MT_m} mSl dt - RT \frac{dV}{V} \\ &= -p d\sigma = c dT = \frac{\sigma}{\gamma} dp = \frac{RT}{p\gamma} dp. \end{aligned}$$

APPLICATION AUX RECHERCHES DE RASSWEILER ET WITHREW ⁽¹⁾ ET DE DUCHÈNE ⁽²⁾

Ces auteurs ont donné des résultats intéressants en ce qu'ils permettent de confronter les résultats d'un calcul théorique et les résultats expérimentaux obtenus à l'aide de photographies de flamme.

Le calcul, à l'aide des équations précédentes relatives à la combustion en volume variable, peut être conduit ainsi : les premier et cinquième membres permettent d'écrire :

$$mS dt = \frac{1}{1 \cdot (\gamma-1)} \cdot V \cdot \left[dp - \left(-p\gamma \frac{dV}{V} \right) \right],$$

(1) RASSWEILER et WITHREW, S.A.E., mai 1938.

(2) DUCHÈNE, *Bulletin de l'Aéronautique*, n° 11.

où $-p\gamma\frac{dV}{V}$ est l'accroissement de pression dû au mouvement du piston seul et calculé par $pV^\gamma = \text{const.}$

L'expression entre crochets est ce que RASSWEILER et WITHREW appellent l'accroissement de pression dû à la combustion seule.

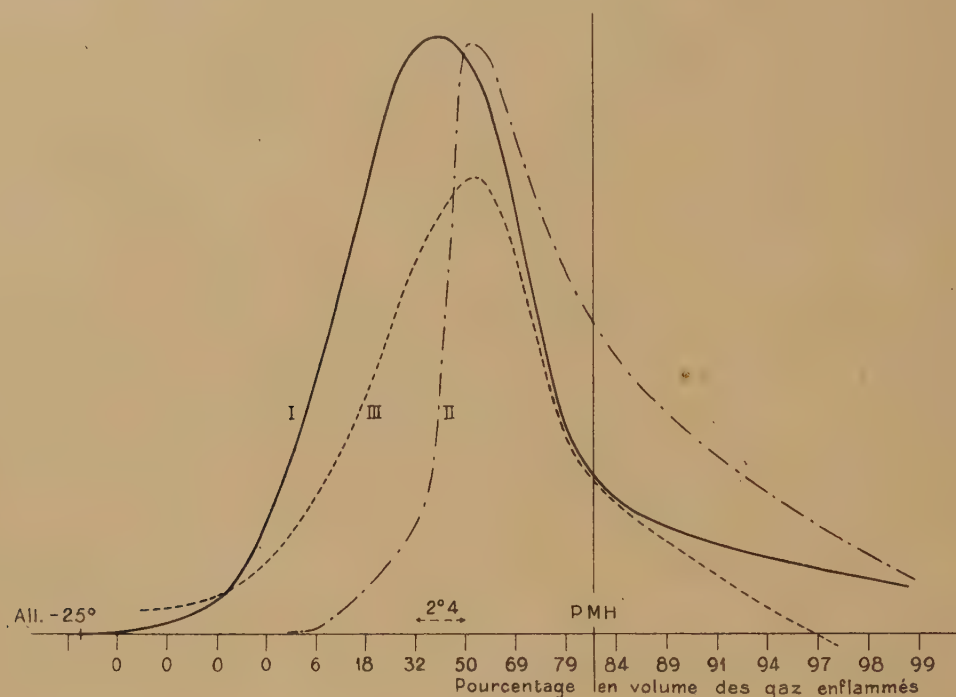


Fig. 22

I : courbe en trait plein représentant les variations de $mS dt$ en fonction de l'angle manivelle ou du temps, à raison de 900 tours/min, et calculées par la formule correcte en fonction de p, V, dp, dV, γ

II : courbe en tirets représentant les variations de la masse brûlée $mS dt$ en fonction de l'angle manivelle ou du temps, calculées à l'aide des cinématographies de flamme qui donnent le pourcentage en volume des gaz enflammés. Le calcul est fait en déterminant la masse des gaz frais comprimés adiabatiquement, suivant la pression indiquée au manographe et dont le γ est déterminé par la compression antérieure à l'allumage

III : courbe représentant la variation des accroissements de pression indiquée

Les résultats relatifs à l'une des séries de mesure de ces auteurs sont reportés sur la courbe I de la figure 22, où une deuxième courbe donne les variations de la masse brûlée d'une cinématographie à l'autre.

Le résultat est nettement contraire à ce qu'on pourrait en attendre à première vue : la courbe $mS dt$ en fonction du temps, donnée par l'équation et la courbe $mS dt$ en fonction du temps, donnée par les photographies, sont très sensiblement de même forme, mais décalées, la première étant en avant d'environ 4 à 5°.

Donc l'émission réelle d'énergie, qui est indiquée par la première courbe, a lieu plus tôt que ne l'indiquent les photographies. La seule explication possible

est que les photographies ne portent que sur les post-combustions très actiniques et ne font pas état des réactions faiblement lumineuses qui, cependant, fourniraient la plus grande partie de l'énergie de la réaction.

Sur la *figure* représentant les variations de $mS \, dt$ en fonction du temps ou de l'angle manivelle, a été ajoutée au pointillé la courbe représentant la variation des accroissements de pression qui, en particulier, descend nettement en dessous de l'axe des abscisses. Il n'est donc pas possible, d'après les chiffres mêmes de RASSWEILER et WITIREW, de conclure à une proportionnalité des $mS \, dt$ et des dp , sauf dans les parties ascendantes et les débuts des parties descendantes. Dans les fins de parties descendantes, la proportionnalité est absolument insoutenable et, cependant, la flamme n'a pas encore atteint tout le volume gazeux, ainsi que l'indiquent les pourcentages de volume enflammés, donnés par les auteurs et qui ont été inscrits en dessous des valeurs d'angle manivelle pour que la comparaison soit facile à lire immédiatement.

Toutefois on peut prétendre, avec vraisemblance, que les queues de courbes correspondraient plutôt à une uniformisation par conduction des températures des gaz brûlés, mais il faut alors admettre, puisque la flamme n'occupe pas encore toute la chambre, que la réaction peu actinique est très nettement prédominante.

On peut remarquer encore que les maxima des courbes d'émission d'énergie sont nettement antérieurs au point mort haut. On peut constater ainsi que $mS \, dt$ est une fonction du temps qui, non seulement s'annule au moment de l'allumage, mais dont la dérivée première s'annule aussi au même instant. Cela tient évidemment au rôle de la surface S du front de flamme qui serait proportionnelle à t^2 , en admettant une vitesse de déflagration non nulle au départ et quasi constante.

Pour préciser ce dernier point, il est alors intéressant de prendre les logarithmes des valeurs de $mS \, dt$ et de voir si ceux-ci sont proportionnels au logarithme de temps. Le résultat expérimental est décevant et confirme, ce qui a déjà été dit plus haut, que la réaction n'est pas homogène et comprend certainement plusieurs stades chimiques, et l'étude intéressante sera celle de la variation de $mS \, dt$ en fonction du temps, à l'aide des données expérimentales et d'un diagramme de pression.

RELATION ENTRE LA PRESSION D'EXPLOSION, LA PRESSION DE COMPRESSION ET L'ÉNERGIE LIBÉRÉE A CHAQUE INSTANT

En revenant à l'équation multiple et en considérant les deuxième, quatrième et sixième membres, et en divisant par cT , on peut écrire :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mS \, dt}{McT_m} = \frac{R}{c} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mS \, dt}{McT_m} = \frac{R}{c} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{R}{\gamma c} \frac{dp}{p}.$$

Le premier membre de ces égalités est, pour chaque expérience, une fonction de temps inconnue, sauf qu'elle est nulle, ainsi que sa dérivée pour $t = 0$, instant d'allumage; c'est aussi une grandeur sans dimension, et représente le rapport de la fraction d'énergie émise par la réaction et reçue par l'unité de masse des gaz frais à l'énergie interne de cette même masse.

Les seconds membres sont des différentielles exactes et il est intéressant de comparer ces équations à celles qui correspondent à un cycle sans allumage que l'on obtient en faisant $l = 0$, c'est-à-dire en annulant le premier membre. En appelant T' et p' les températures et pressions dans le cycle sans allumage et en remarquant que $\frac{R}{\gamma c} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ il vient, en éliminant le volume V :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mS l dt}{McT_m} = \frac{dT}{T} - \frac{dT'}{T'}$$

$$\frac{mS l dt}{McT_m} = \frac{dp}{p} - \frac{dp'}{p'}$$

Pratiquement l'équation des pressions est seule utilisable, puisque les pressions sont celles, supposées uniformes, des gaz frais et brûlés et qu'on peut les relever expérimentalement, tandis que celle des températures, relative aux seuls gaz frais, doit faire l'objet d'un calcul. Le rapport γ ne figure plus dans l'équation des pressions et celle-ci peut s'interpréter ainsi :

Le rapport de l'énergie émise par la réaction, pendant le temps dt , à l'énergie interne de la masse totale des gaz, est égal à la différence des variations relatives de pressions dans un cycle avec explosion et dans un cycle sans allumage.

Un diagramme de pression avec explosion et un diagramme de compression pure permettent donc d'étudier expérimentalement l'émission d'énergie de la réaction, mais il faudra toujours calculer la température T qui figure au dénominateur du premier membre, par $p \cdot V = MRT_m$.

Un diagramme de pression, dans le cas d'une combustion à volume constant, peut évidemment être utilisé en faisant $dp' = 0$ dans l'équation.

Il est naturel d'admettre que m , masse brûlée par unité de temps et par unité de surface du front de flamme est croissant avec la température et que la surface S du front de flamme est, pendant un certain temps, proportionnelle à t^2 , mais on constate expérimentalement, aussi bien dans les combustions à volume constant de Laure et dans les combustions à volume variable de Duchène, et celles de Rassweiler et Withrew, que $\frac{mS}{T_m \cdot t^2}$ est croissant avec le temps.

Pour analyser, en première approximation, un diagramme de pression, on est donc conduit à poser $mS = BT_m t^n$, c'est-à-dire en intégrant :

$$L \frac{p}{p'} = \frac{Bl}{Mc} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad \text{ou} \quad p = p' \times e^{\frac{Bl}{Mc} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}}$$

On cherche ensuite l'exposant n qui convient le mieux, soit pour l'ensemble de la courbe $L \frac{p'}{p}$ en fonction du temps, soit pour l'arc du début, soit pour un arc moyen.

Les résultats trouvés sur le diagramme n° 747, de Rassweiler et Withrew, montrent qu'au début de la courbe $L \frac{p'}{p}$ il faut prendre $n = 3$, et si l'on veut englober toute la courbe jusqu'au point d'inflexion proche du point mort haut il faut prendre $n = 4$. Cependant, cette détermination de n est fragile, car si l'on admet un retard à l'allumage de $1,6^\circ$ ou, plus exactement, si l'on admet un délai d'allumage de 0,3 milliseconde, les valeurs de n tombent à 2 et 3,3.

Les résultats trouvés sur les diagrammes de Laure sont $n = 2$, pour un mélange pauvre ou trop riche, et $n = 3,3$ pour un mélange théorique.

Si l'on rapproche ce fait d'une variation sensible de n le long de l'arc de courbe de montée en pression de celui signalé plus haut, suivant lequel les photographies de flamme ne décèlent que les post-combustions très actives, on peut interpréter cette variation de n comme étant la preuve de la complexité de la réaction chimique qui se produirait donc en stades successifs.

Une étude systématique de la variation de n pourrait sans doute caractériser utilement les carburants, puisque les caractéristiques des moteurs sont englobées dans p' , l'instant d'allumage est $t = 0$ et la richesse du mélange est fixée par $\frac{l}{M}$, M étant la masse totale des gaz, gaz inertes compris. Cependant, les résultats trouvés sur les diagrammes de Laure montrent que la variation de n n'est pas la même pour les mélanges pauvres ou trop riches et le mélange théorique; il est donc à craindre que la variation de n soit une caractéristique variant lentement avec les conditions d'emploi, mais les renseignements que donneraient l'étude des variations de n et, plus généralement, l'étude des variations du rapport $\frac{mS}{T_m \cdot t^2}$ sont de nature physique et chimique, ce qui n'est pas le cas du classement des combustibles en indices d'octanes ou de cétènes.

CHAPITRE VIII

INTERPRÉTATION DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX RELATIFS A LA COMBUSTION EN MILIEU HÉTÉROGÈNE AVEC ALLUMAGE PAR COMPRESSION

GÉNÉRALITÉS

Dans les moteurs à allumage par compression, l'aspect global de l'évolution de la combustion est très différent de ce qui se passe dans le cas d'un allumage provoqué. Il y a injection de combustible liquide dans un air à température supérieure à la température spontanée d'inflammation ou dans un air où la température est voisine et va devenir, très rapidement, supérieure à la température spontanée d'inflammation.

Dès le début de l'injection, le jet liquide est transformé en un brouillard de gouttelettes dont les couches extérieures sont freinées par l'air, alors que les couches intérieures progressent plus avant. Dans le jet de gouttelettes ainsi formé, il y a des gouttelettes de grosseur très variable, les premières formées étant les plus fines et entraînant avec elles le maximum d'air. C'est donc sur le flanc du jet que le mélange air-gouttelettes fines peut le plus facilement se transformer en mélange théorique et qu'il est ainsi le plus probable que se déclenchera l'allumage.

Cet allumage peut donc se produire avant même que les gouttelettes soient toutes vaporisées et avant même la fin de l'injection, si bien que la combustion commence en milieu hétérogène.

Les équations qui ont servi dans le chapitre précédent ont toujours un sens, puisqu'elles s'appliquent uniquement à l'évolution des gaz frais qui, ici, peuvent être en partie de l'air pur, mais la loi de variation de $\frac{mS}{T_m t^2}$, en fonction du temps, sera certainement différente, en ce que la position du premier point d'allumage sera plus centrale, que d'autres points d'allumage peuvent se déclencher ailleurs avec autant de chances et que la température d'ensemble est supérieure à la température spontanée d'inflammation.

On aura donc toujours :

$$\frac{mS}{McT_m} dt = \frac{dp}{p} - \frac{dp'}{p'}$$

et, pour analyser un diagramme de pression en première approximation, on pourra encore poser :

$$mS = BT_m t^n \quad \text{et} \quad L \frac{p}{p'} = \frac{Bl}{Mc} \cdot \frac{tn+1}{n+1},$$

et étudier les variations de n . Toutefois, un élément nouveau intervient, surtout au début de la combustion, parce que S peut varier avec la nature de l'injection : configuration du jet de gouttelettes et diamètre de celles-ci.

Il y aura encore une difficulté nouvelle : c'est que l'instant d'allumage ne coïncide pas avec le début d'injection ; on ne pourra donc obtenir les variations de n qu'à partir de l'instant où la courbe de montée en pression change de courbure. Il ne faut pas, en effet, compter sur une courbe expérimentale de compression pour donner l'instant approximatif d'allumage, car l'énergie thermique absorbée par la vaporisation du combustible est notable et le diagramme de pression avec injection est légèrement en dessous du diagramme de compression puis, au moment de l'allumage, passe au-dessus. Il faudra donc calculer p' d'après le début du diagramme de pression avec injection.

On constate alors que l'exposant n est plus faible, mais que le coefficient B est plus élevé, ce qui correspondrait à un allumage multiple.

Cette étude peut être complétée très utilement par l'étude de photographies de flamme, sur lesquelles le point d'inflammation peut être repéré directement.

PHOTOGRAPHIES DE FLAMME — DÉLAI D'INFLAMMATION INDICE DE CÉTÈNE

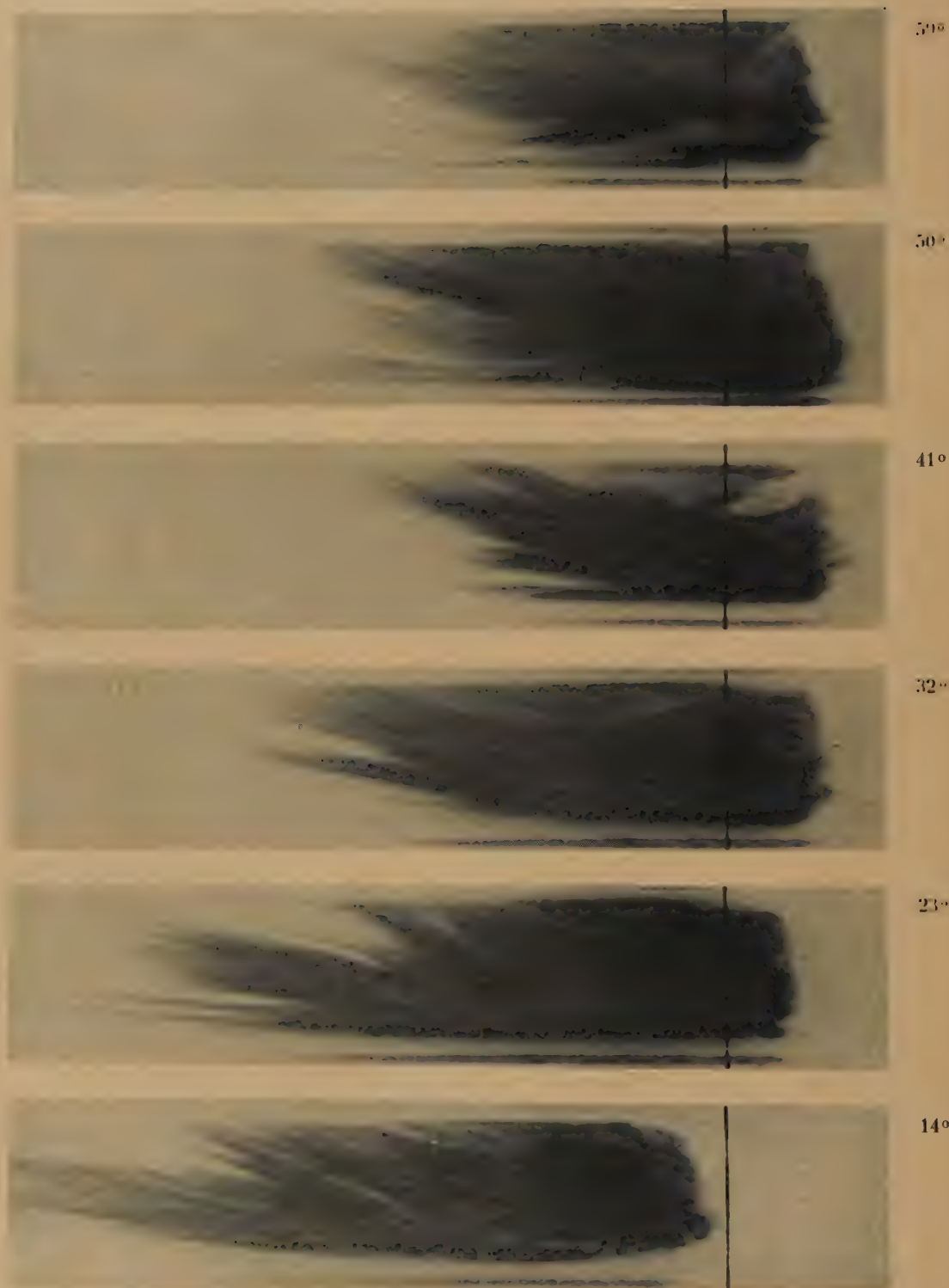
Des photographies de flamme, en moteur à allumage par compression, ont été faites pour l'étude des délais d'inflammation et la détermination des indices de cétène. Le moteur expérimental, utilisé en France, a été conçu et dessiné par CLERGET ⁽¹⁾, à la suite d'expériences faites par ce constructeur avec DUCHÈNE, sur un moteur à allumage provoqué, CLERGET lui-même, DUMANOIS et DESBROSSE, et l'auteur de la présente étude ont utilisé ce moteur.

Le fait dominant, et que mettent très bien en lumière DUMANOIS et DESBROSSE ⁽²⁾, est l'existence d'un délai d'inflammation irréductible qu'ils appellent δ , qu'il faut systématiquement retrancher du délai brut pour obtenir une loi numérique simple reliant le délai à l'indice de cétène.

Ainsi, les deux carburants d'indices de cétènes n_1 et n_2 , donnant les délais réduits $\alpha_1 - \delta$ et $\alpha_2 - \delta$, qui servaient de carburants de référence, ont été mélangés dans une proportion variable $\frac{p}{q}$; les auteurs trouvent que

(1) CLERGET, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 22 février 1937.

(2) DUMANOIS-DESBROSSE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 15 mars 1937.



3 a. — Cétène 73 (variation de l'avance à l'injection)

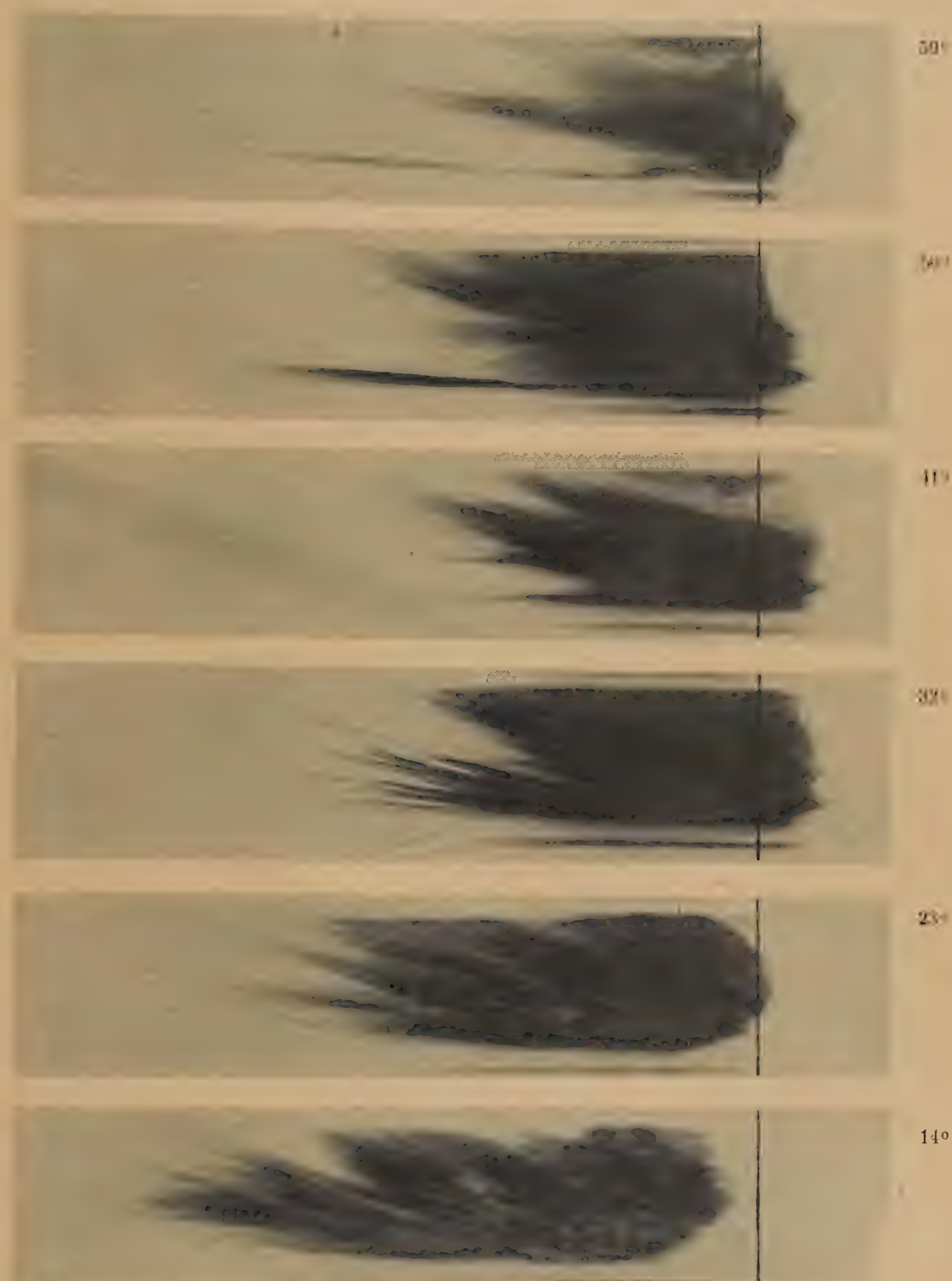


Fig. 23 b. — Cétène 50 (variation de l'avance à l'injection)

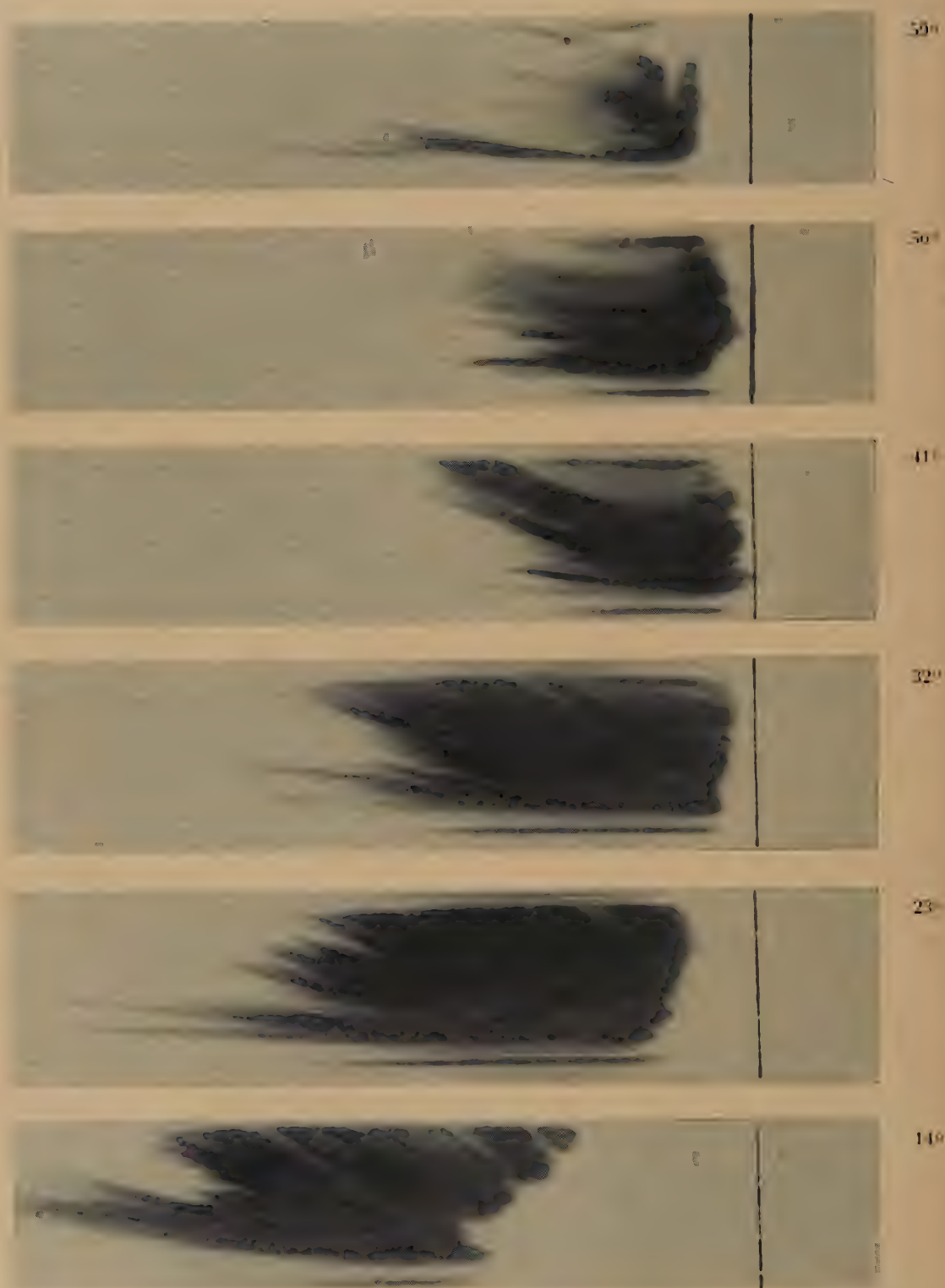


Fig. 23 n — Cétène 34 (variation de l'avance à l'injection)

l'indice n de cétène et le délai réduit $\alpha - \delta$ du mélange sont donnés par les relations :

$$n = \frac{pn_1 + qn_2}{p + q} \quad \text{et} \quad \frac{p + q}{\alpha - \delta} = \frac{p}{\alpha_1 - \delta} + \frac{q}{\alpha_2 - \delta};$$

ainsi, les indices de cétène suivent la loi des mélanges, alors que ce sont les inverses des délais réduits qui suivent cette loi.

INFLUENCE DE L'AVANCE A L'INJECTION

Cette influence a été étudiée par DESBROSSE (1) pour analyser l'extrême sensibilité de l'avance à l'injection à partir d'une certaine valeur. La conclusion était à prévoir : la vaporisation, augmentant avec l'avance à l'injection, la combustion présentait de nombreux points d'allumage et constituait une véritable détonation.

Ces essais ont été poursuivis au delà de l'avance dangereuse et ont montré l'existence d'un phénomène très singulier : la détonation décroît en importance et en brutalité et les diagrammes et les photographies de flamme (*fig. 23*) ont montré une disparition progressive de la combustion. Ces résultats (1), publiés avec un commentaire simplement descriptif, comportent un ensemble de conséquences intéressantes, qui font apparaître la complexité de la réaction, à la manière déjà entrevue lors de l'étude des résultats de RASSWEILER et WITHREW, dans le chapitre précédent, à propos de « la variation progressive de l'exposant n ».

Au delà de l'avance dangereuse, qui correspond à la combustion en phase-vapeur, la flamme devient plus tardive, plus hétérogène, diminue et finit par disparaître complètement, pour une avance variant de 100 à 120°, suivant le carburant employé.

Parallèlement, le diagramme de pression commence à présenter une sinuosité supplémentaire montrant un début de combustion, ou plutôt, puisque le milieu est à ce moment quasi homogène — quant au macro-mélange, suivant l'expression de Boerlage —, montrant qu'une partie du mélange brûle d'abord, puis enflamme ensuite le reste, après un nouveau délai pouvant atteindre une dizaine de degrés manivelle. Ensuite ce délai, entre la première combustion et la seconde s'accroît, et la seconde combustion finit elle-même par disparaître.

Le phénomène est apparent sur les diagrammes de carburants d'indice de cétène 34 et 50; il n'existe pas pour le carburant d'indice cétène 73, mais, sur les photographies de flamme, il est apparent pour les trois carburants étudiés.

(1) DESBROSSE et FOUCHÉ, *Technique moderne*, juillet 1941.

Sur les diagrammes, la sinuosité supplémentaire, que l'on pourrait appeler « en marche d'escalier », qui précède la principale montée en pression, n'apparaît que vers 75° d'avance à l'injection, alors que l'avance dangereuse est de 35° pour les trois carburants. Mais, sur les photographies de flamme, on voit apparaître, avant la combustion très actinique, une flamme très peu actinique qui s'accroît en précocité pour une avance croissante, mais qui finit aussi par disparaître complètement, en intensité lumineuse tout au moins.

Il y a donc lieu de penser que la combustion n'est pas chimiquement homogène et qu'on peut reprocher aux photographies de flamme de DESBROSSE, comme à celles de RASSWEILER et WITHREW, de ne faire état que de la combustion très actinique et, ainsi, de fournir un délai d'inflammation n'ayant pas la signification que lui donnaient les auteurs.

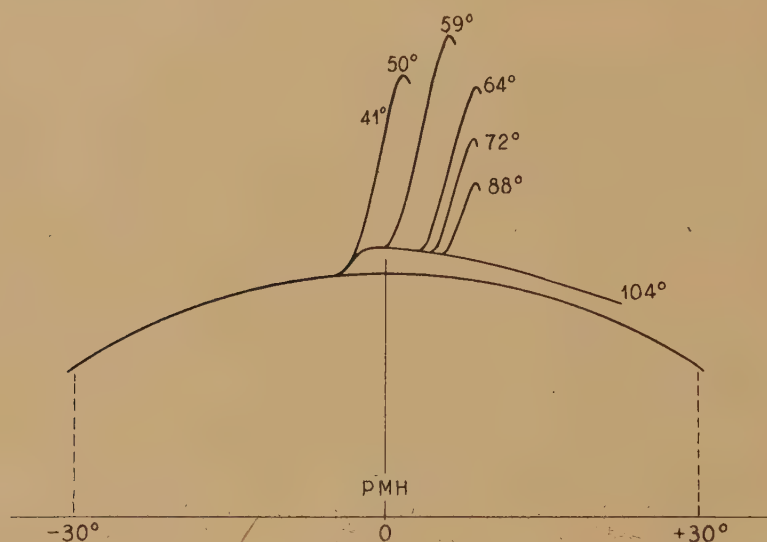


Fig. 24. — Cétène 34

Cependant, la différence est grande entre ce qui se passe, à ce sujet, pour l'une ou l'autre de ces études de photographies de flamme car, dans le cas des photographies de RASSWEILER et WITHREW, il était très net que la montée en pression principale était antérieure à l'instant d'inflammation actinique, alors que, dans le cas des photographies de DESBROSSE, la différence est à peine sensible. Donc, pour les premiers, la combustion peu actinique est très importante pour l'ensemble de la montée en pression alors que, pour le second, cette combustion peu actinique ne semble jouer qu'un rôle d'amorçage. Ce qui confirme ce dernier point de vue est que les diagrammes de Desbrosse montrent que la combustion peu actinique porte sur une faible partie du combustible, et que cette partie reste toujours la même quand augmente l'avance à l'injection, car les débuts de montée en pression restent toujours au même point du diagramme à partir de l'avance dangereuse, la sinuosité en marche d'escalier s'amorce toujours au même endroit de la courbe de compression, et la montée

principale en pression se greffe sur la courbe des pressions due à cette combustion partielle, en des points de plus en plus éloignés quand augmente l'avance. Si bien que la combustion partielle reste toujours la même, quelle que soit l'avance à l'injection, alors que le second délai, relatif à la combustion actinique, augmente progressivement jusqu'à 90° après le point mort haut.

Sur les figures 24 et 25, relatives aux carburants d'indice de cétène 34 et 50 — pour le carburant d'indice cétène 73 le phénomène n'apparaît pas sur les diagrammes —, les diagrammes de pressions ont été reportés seulement à partir de l'avance de détonation ou combustion en phase-vapeur.

Il existe donc, comme pour les moteurs à allumage provoqué, une combustion partielle, faiblement actinique, qui pourrait être, par exemple, celle de

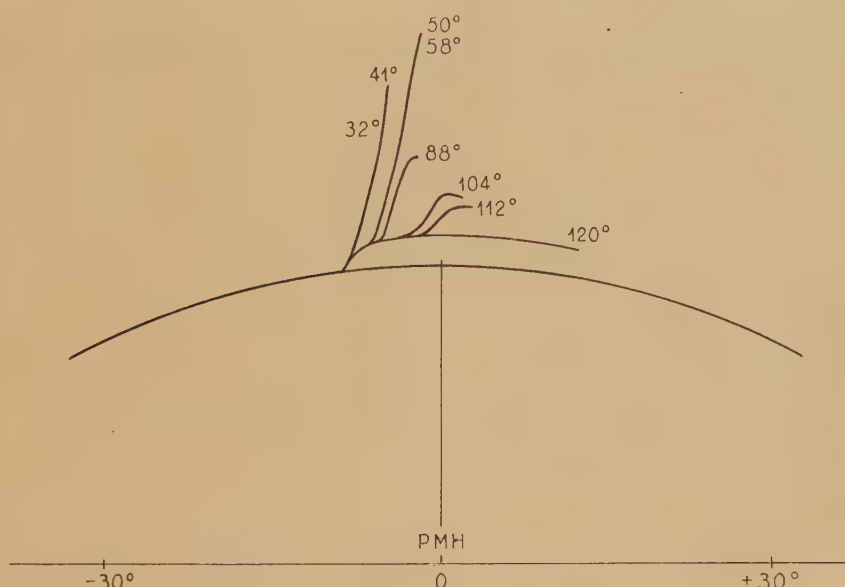


Fig. 25. — Cétène 50

l'hydrogène libre, fortement exothermique et qui conditionne toutes les autres combustions subséquentes. Il faut, en effet, se rappeler que les essences ont un indice de cétène faible par rapport aux carburants plus lourds, c'est-à-dire que les essences brûlent difficilement par compression et qu'il ne faut pas compter sur un cracking donnant des carburants légers pour accélérer la combustion des carburants lourds. Il y a certainement cracking, mais ce ne sont pas les carburants légers produits qui favoriseraient la combustion, mais le fait que les molécules craquées présentent des valences libres, qu'elles sont déjà activées ou bien qu'il y a libération d'hydrogène atomique activé dont la combustion serait la seule cause de la combustion partielle initiale. En effet quand, dans les expériences de DESBROSSE, l'avance augmente, le cracking a lieu un peu plus tôt, dure plus longtemps, les molécules craquées, susceptibles de se reconstituer en carburants légers, l'ont déjà fait quand peut s'amorcer la combustion

partielle et celle-ci se trouve en présence de carburants légers et de résidus de cracking qui sont tous deux à bas indice de cétène.

Le fait que, pour le carburant d'indice de cétène 73, donc à faible délai d'allumage, le phénomène n'apparaît pas sur les diagrammes, mais seulement sur les photos de flamme, montre aussi que la combustion partielle est bien déterminante de la combustion principale. D'ailleurs on peut voir, sur les diagrammes à très forte avance, que la combustion partielle, qui reste seule, est plus importante pour le carburant d'indice 50 que pour le carburant d'indice 34, et qu'il faut aller jusqu'à 120° d'avance à l'injection pour le premier, alors qu'il suffit d'aller jusqu'à 104° pour le second, pour faire disparaître la combustion principale.

C'est donc cette combustion partielle, et elle seule, qui détermine la qualité d'un carburant.

Une étude chimique, relative à la véritable nature de cette combustion partielle, sortirait du cadre de cette étude. Cependant elle serait réellement déterminante, car à supposer que les éléments chimiques, susceptibles de provoquer cette combustion partielle soient stables et puissent, par exemple, être analysés après cracking résultant d'une injection, dans une atmosphère inerte, comprimée et chaude, comme dans un moteur en fin de compression, c'est la concentration en ces éléments qui définit réellement l'indice de cétène et cette concentration intervient dans l'exponentielle de la combustion par le rapport $\frac{I}{M}$ de la chaleur que peut dégager cette combustion partielle par rapport à la masse totale de gaz évoluant dans le moteur. Si ces éléments étaient stables il serait peut-être possible de modifier les indices de cétènes de carburants donnés en les dopant par ces mêmes éléments.

Doping des carburants.

La question du doping des carburants a déjà été étudiée depuis longtemps, soit comme antidétonants, soit comme accélérateurs de combustion. De nombreuses études ont été faites sur ce sujet, mais celle qui peut sembler la plus intéressante, eu égard à ce qui précède, est la note publiée par AUBERT, CLERGET, DUCHÈNE ⁽¹⁾ relative au nitrate d'éthyle qui, selon ces auteurs, agirait à la fois comme *amorce d'inflammation* et régularisateur de combustion, alors que, suivant les mêmes auteurs, l'action de l'alcool serait inverse.

Toutefois, il est hors de doute que le phénomène de la combustion est très modifié lorsque les carburants sont dopés. En particulier, l'action du nitrate d'éthyle est variable, non seulement avec sa concentration, mais aussi avec l'avance à l'injection et une série de photographies de flamme prises sur le moteur Clerget, avec le gas-oil 34, dopé de 1 % de nitrate d'éthyle, révèle une diminution de délai d'allumage plus accentuée aux fortes avances qu'aux

(1) AUBERT, CLERGET, DUCHÈNE, C.R., 12 novembre 1935.

avances plus faibles qui correspondraient à une marche normale du moteur. Donc la sensibilité, déjà grande, d'un moteur à allumage par compression, à l'avance à l'injection serait encore accentuée, et si un gain de puissance est réalisable, il est à craindre que de moindres variations de marche soient acceptables, en ce sens qu'une moindre augmentation de température de la chambre peut provoquer l'apparition d'un régime détonant stable.

Il reste tout de même vrai que le phénomène principal, dans une combustion, est ce qui se passe en son début réel, donc avant même que la montée en pression soit sensible : *la classification en indice de cétène est donc plus rationnelle que la classification en octane*, mais l'une et l'autre restent empiriques et la seule classification théorique est celle qui serait donnée par les courbes de pression étudiées au double point de vue du facteur B et de la variation de l'exposant n , le premier agissant sur l'ensemble de la courbe sans en modifier la forme générale, le second agissant sur la forme même de la courbe.

CONCLUSIONS

L'étude des diagrammes de pressions, donnés par un bon indicateur, permet l'adaptation réciproque du moteur et du carburant, en vue d'obtenir la plus forte puissance en même temps qu'un bon rendement chimique, c'est-à-dire une combustion plus complète :

1° Un bon indicateur doit être à inertie minimum ou, plus exactement, comprendre un système déformable élastiquement à haute fréquence. Cependant, pour l'étude de la montée en pression, la recherche d'une haute fréquence est moins importante que la fidélité et la proportionnalité des indications aux pressions à chaud et à froid.

Dans ce but, il est certain qu'une membrane non plane, telle que celle qui est définie dans cette étude, est nettement préférable à la membrane plane et, surtout, à une membrane conique, car les allongements de méridiens n'interviennent pas, ne limitent pas le travail en flexion, de telle sorte que l'amplitude des déformations peut y être plus grande, ou qu'on peut diminuer le diamètre et obtenir un manographe plus réduit, mais aussi efficace.

Il est nécessaire, aussi, que le volume de la canalisation qui relie le moteur à la membrane n'ait pas une forme comportant des étranglements ni des variations de sections trop rapides, car une montée en pression très vive, mais non vibrante, peut imposer à toute membrane un régime vibrant sur le premier partiel et faire croire à une détonation. L'existence de ce volume sous la membrane est évidemment préjudiciable à l'exactitude de l'indication de pression mais il a l'avantage de maintenir contre la membrane une masse de gaz usés qui la protège efficacement contre toute élévation excessive de température. On peut remarquer, à ce sujet, que la membrane à méridienne courbe permettrait une configuration intéressante du volume sous la membrane, sans imposer à ce volume une trop grande valeur.

2° La circulation d'énergie thermique pure — ou énergie interne — de densité massique cT , a été définie par un système d'équations aux dérivées partielles, faisant apparaître la circulation d'énergie mécanique qui accompagne la première, mais à vitesse beaucoup plus élevée. Ce résultat a explicité l'établissement quasi instantané de l'égalité de pression entre gaz brûlés et gaz frais, pendant une combustion déflagrante, et permis de préciser l'importance de l'augmentation de température et de pression des gaz frais, à chaque instant.

Ce même résultat a explicité l'hypothèse de l'évolution adiabatique des gaz frais et permis de montrer que la variation *relative* de pression dans un moteur, pendant un temps dt , est égale à la somme de la variation *relative* de pression due au mouvement du piston et du *rapport* de l'énergie émise par la

réaction, pendant le même temps, à l'énergie interne de la masse totale des gaz. Ce sont donc des variations *relatives* qui s'ajoutent et, en intégrant, on voit que l'influence de la combustion dans un moteur a un caractère *multiplicatif* sur l'évolution de la pression, et non pas un caractère additif.

3° Un diagramme des pressions p , avec explosion, et un diagramme des pressions p' , sans explosion, donnent l'évolution de la réaction par l'intermédiaire de la courbe $L \frac{P}{p'}$ en fonction du temps. Cette courbe est tangente à l'origine, à l'axe des temps, et l'on peut la comparer pratiquement à une courbe en t^n , sur un parcours plus ou moins long. L'étude de l'exposant n révèle la complexité de la réaction chimique et permet de caractériser les carburants, plus clairement que les indices d'octane et de cétène. Cette étude, faite sur les essais de RASSWEILER et WITHREW et sur ceux de DESBROSSE, montre l'existence d'une combustion partielle précédant ou commandant la combustion principale et qui pourrait être de même nature pour tous les carburants. Cette combustion partielle agirait sur la combustion principale, par la concentration relative à la masse totale de combustible d'un certain résultat chimique de l'activation précédant la combustion.

En terminant cette étude, l'auteur tient à remercier MM. les Professeurs BÉGHIN et RIBAUD de leur bienveillante compréhension, M. DESBROSSE, qui l'a aidé bien souvent de sa grande expérience technique, les mécaniciens BOUSQUET et JOST, qui lui ont donné des conseils pertinents pour la construction du manographe simple décrit au début de ce travail, et qui l'ont réalisé, et surtout M. le Professeur Jean VILLEY, dont l'inaltérable patience, la haute compétence, la courtoise complaisance et les claires critiques lui ont permis de mener à bonne fin ce travail qui fut si souvent pénible, par suite des circonstances et de la complexité extrême des travaux déjà existants.

L'auteur tient aussi à saluer la mémoire de M. CLERGET, qui l'a souvent reçu à son laboratoire du Service des Recherches de l'Aéronautique et grâce à qui il a pu, avec M. DESBROSSE, faire des recherches à l'aide de son moteur expérimental.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

APPLICATION
DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE FOURIER
D'UNE FONCTION DISCONTINUE

Vu et approuvé :

Paris, le 6 juillet 1945.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

P. MONTEL

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

G. ROUSSY



